THÉORÈME DE AITKEN - GAUSS - MARKOV (H3, J1, J3)
(13 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Le **théorème de AITKEN - GAUSS - MARKOV** est un théorème fondamental associé à la **méthode des moindres carrés généralisés**, appliquée à un **modèle de régression linéaire** multiple « standard ».

(i) Soit $y = X\, b + u$, avec $E\, u = 0$ et $V\, u = \Sigma$, un modèle de régression linéaire multiple exprimé dans l'**espace des observations** et mis sous forme standard ($\Sigma = \sigma^2\, \Omega$), et soit $b_g^{\wedge}$ ou $b^{\#} = (X'\, \Omega^{-1}\, X)^{-1}\, X'\, \Omega^{-1}\, y$ l'**estimateur des mcg** de b.

On veut estimer le « nouveau » **paramètre** :

(1) $a = L\, b$, où $L \in M_{JK}(\mathbf{R})$ est donnée et $J \in \mathbf{N}^*$ est quelconque.

On note :

(2) $\mathscr{L}_a = \{a_C = C\, y : C \in M_{JN}(\mathbf{R})\}$

la classe des estimateurs linéaires (par rapport à y) a_C de a et :

(3) $L_a = \{a_C \in \mathscr{L}_a : E\, a_C = a\}$

la (sous-)classe des **estimateurs sans biais**.

Alors, le **théorème de A.C. AITKEN - C.F. GAUSS - A.A. MARKOV** établit que l'estimateur suivant de a :

(4) $a^{\#\#} = L\, b^{\#\#} \in L_a$

est l'unique estimateur tel que la matrice $V\, a_C - V\, a^{\#\#}$ soit semi-définie positive (cf **matrice définie positive**).

Autrement dit, le **programme linéaire quadratique** suivant :

(5)
$$\min h'\, (V\, a_C)\, h, \quad \text{avec } h \in \mathbf{R}^J,$$
$$\text{sous } a_C \in L_a,$$

admet une solution unique donnée en (4).

(ii) Le **théorème de AITKEN-GAUSS-MARKOV** précédent généralise le **théorème de GAUSS-MARKOV**.