THÉORÈME DE BIRKHOV (A5, K2, N)
(28 / 07 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **théorème de BIRKHOV** constitue un résultat de base de la **théorie ergodique** au sein de la **théorie des processus**.

(i) **Première version**. Avec les notations du **théorème ergodique maximal**, on considère un couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tq $a < b$ et l'on pose :

(1) $\quad N = \{x \in E : \lim_n \inf n^{-1} \Sigma_{i=0}^{n-1} f_i (x) < a < b < \lim_n \inf n^{-1} \Sigma_{i=0}^{n-1} f_i (x)\}.$

Alors, le **théorème (ergodique) de G.D. BIRKHOV** s'exprime par les trois propriétés suivantes :

(a) N est μ-négligeable ;

(b) il existe une **fonction numérique** $\overline{f}_\infty : E \mapsto \mathbf{R}$ qui est μ-intégrable et tq :

(2) $\quad \lim_n \; n^{-1} \Sigma_{i=0}^{n-1} f (\varphi^i (x)) = \overline{f}_\infty (x), \qquad \mu\text{-p.p. } \forall x \in E ;$

(c) $\overline{f}_\infty (\varphi (x)) = \overline{f}_\infty (x), \qquad \mu\text{-p.p. } \forall x \in E.$

(ii) **Seconde version**. On considère un **espace mesuré** $(E, \mathscr{A}, \mu)$, où μ est une **mesure bornée**, une **application bijective** $\varphi : E \mapsto E$ et une fonction numérique $f \in L_{\mathbf{R}}^1 (E, \mathscr{A}, \mu)$. On définit la fonction :

(3) $\quad g = f \circ \varphi,$

ainsi que l'**application linéaire** A de $L_{\mathbf{R}}^1 (E, \mathscr{A}, \mu)$ dans $\mathscr{F}(E, \mathbf{R})$ (espace des fonctions numériques $E \mapsto \mathbf{R}$) induite par (3) selon :

(4) $\quad f \mapsto g = A (f).$

A est linéaire en raison des égalités suivantes :

(5) $$A (\alpha f_1 + \beta f_2) = \begin{cases} \alpha (f_1 \circ \varphi) + \beta (f_2 \circ \varphi) \\ (\alpha f_1 + \beta f_2) \circ \varphi, \qquad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \forall (f_1 , f_2) \in L_{\mathbf{R}}^1 \times L_{\mathbf{R}}^1. \\ \alpha A (f_1) + \beta A (f_2) \end{cases}$$

On suppose, en outre, que μ est invariante par φ (ie la **mesure image** de μ par φ est μ elle-même : $\varphi (\mu) = \mu$, ou encore, $\mu (A) = \mu (\varphi^{-1} (A)), \forall A \in \mathscr{A}$) (cf **mesure invariante**).

Le **théorème de G.D. BIRKHOV**, ou **théorème de G.B. BIRKHOV - A.Y. KHINTCHINE**, s'exprime dans les deux propriétés suivantes :

(a) A est un **endomorphisme** de **norme** 1 dans $L_{\mathbf{R}}^1$ $(E, \mathcal{A}, \mu)$;

(b) si l'on pose :

(5) $\bar{A}_N = N^{-1} . \Sigma_{n=1}^{N} A^n$,

alors, quelle que soit $f \in L_{\mathbf{R}}^1$, la fonction $\bar{f}_N = \bar{A}_N (f)$ tend μ-p.p. (lorsque $N \to +\infty$) vers une fonction $\bar{f}_\infty \in L_{\mathbf{R}}^1$ tq :

(6) $\int \bar{f}_\infty \, d\mu = \int f \, d\mu$.