THÉORÈME DE BLACKWELL - RAO (D1, H2)
(02 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

L'important **théorème de BLACKWELL - RAO** permet de construire un **estimateur** à la fois sans **biais** et de **dispersion** minimum (**procédure de BLACKWELL - RAO**).

(i) Soit ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$) un **modèle image**, g : $\Theta \mapsto \mathbf{R}^Q$ une fonction mesurable donnée (cf **application mesurable**) et $\tau = g(\theta)$ un **paramètre** à estimer. On considère un **estimateur sans biais** T de τ, défini par l'application mesurable t : $\mathscr{X} \mapsto g(\Theta)$ (ie $E_\theta T = g(\theta)$, pour tout $\theta \in \Theta$), et une **statistique exhaustive** S pour le paramètre τ.

Alors, l'**espérance conditionnelle** :

(1) $t^*(s) = E_\theta (T / S = s)$

définit une **statistique** T* selon :

(2) $T^* = t^*(s(X))$.

Cette statistique ne dépend pas de θ puisque S est exhaustive : on peut donc écrire aussi $t^*(s) = E(T / S = s)$, où l'espérance conditionnelle E (. / S) est calculée à l'aide d'une **probabilité** arbitraire P_θ , dont l'image X est l'une des lois P_θ^X.

Le théorème consiste alors en les deux propriétés suivantes :

(a) T* est un estimateur sans biais de $\tau = g(\theta)$ (comme l'est T), ie :

(3) $E_\theta T^* = g(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta$;

(b) T* est préférable à T au sens des **formes quadratiques**, ie au sens de la relation de **préordre** suivante :

(4) $T^* \geq T \Leftrightarrow V_\theta T^* < V_\theta T, \quad \forall \theta \in \Theta$,

où V_θ T (resp V_θ T) est la **matrice de dispersion** de T* (resp de T), élément de $S_Q(\mathbf{R})$ (**matrice symétrique**).

(ii) L'égalité de définition (2) s'entend comme une égalité presque sûre (cf **espérance conditionnelle**). L'estimateur $T^* = E_\theta (t(X) / s(X) = s)$ de $\tau = g(\theta)$ ainsi obtenu (où s désigne aussi bien l'application mesurable que l'une des ses valeurs dans $g(\Theta)$) est appelé **estimateur de D. BLACKWELL - C.R. RAO**, ou **amélioré de D. BLACKWELL - C.R. RAO**, de τ.

On dit même parfois que T* est le « **RAO-blackwellisé** » de T.

Cet estimateur est parfois défini en supposant que S est une **statistique exhaustive minimale**.

(iii) Pour que T* soit déterminée de façon unique, il faut que S vérifie la condition suivante. Pour tout couple (φ_1 , φ_2) de fonctions définies sur $\mathbf{R}^q$ et à valeurs dans **R**, l'égalité $E_\theta\ \varphi_1\ (S) = E_\theta\ \varphi_2\ (S)$ implique l'égalité presque sûre $\varphi_1\ (S) = \varphi_2\ (S)$. Autrement dit, si S est une **statistique complète**, T* est P_θ-p.s. l'unique estimateur sans biais à variance minimum de τ, $\forall\ \theta \in \Theta$ (cf **inégalité de CRAMER-DARMOIS-FRÉCHET-RAO**).

(iv) Le théorème n'est pas spécifique d'un **problème d'estimation** et peut s'étendre à un **problème de décision** statistique. On considère ainsi un problème de **décision statistique** fondé sur le modèle image ci-dessus, un **espace de décision** (ou d'action) (D, $\mathscr{B}_D$) et sur une **fonction de risque** R.

On suppose que :

(a) D est (une **partie convexe** d') un **espace vectoriel** réel E ;

(b) la **fonction de perte** $L : \Theta \times D \mapsto \mathbf{R}$ qui définit R admet une deuxième application partielle convexe sur D, pour tout $\theta \in \Theta$ (cf **fonction convexe**) ;

(c) S est exhaustive pour le paramètre $\tau = g\ (\theta)$, supposé à valeurs dans D.

Par suite, si $\delta \in \Delta = D^{\mathscr{X}} = \mathscr{A}(\mathscr{X}, D)$ est une **règle de décision pure**, alors la règle pure δ^*, basée sur S et définie selon :

(5) $\delta^*\ (s) = E_\theta\ (\delta\ (X)\ /\ S = s)$,

est préférable (au sens de la relation d'ordre définie sur Δ par R) à la règle pure δ.

(v) Ainsi, un **conditionnement** à l'aide d'une statistique exhaustive permet de réduire la dispersion d'une règle de décision ou d'un estimateur. De plus, s'il existe une statistique de dispersion minimum, cette statistique est fonction (ie dépend) d'une statistique exhaustive.