

THÉORÈME DE BOCHNER - KOLMOGOROV (B1, C4, E, N)

(14 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **théorème de BOCHNER - KOLMOGOROV** est un théorème fondamental qui permet de construire une **mesure produit** à partir d'un ensemble produit quelconque (cf **produit d'espaces probabilisés**).

Il sert aussi de fondement pour l'étude de diverses **propriétés asymptotiques** (cf **loi asymptotique**, **modèle asymptotique**, **tribu asymptotique**, **variable asymptotique**).

Ses interventions sont nombreuses : **échantillonnage**, **théorie des processus**.

(i) Soit T un **ensemble** quelconque et $\mathcal{P}_f(T)$ l'ensemble des **parties** finies de T . On note $(E^T, \mathcal{A}^{\otimes T})$ le produit d'une **famille** donnée d'**espaces probabilisables** $(E_t, \mathcal{A}_t)$ ($t \in T$), avec $E^T = \prod_{t \in T} E_t$ et $\mathcal{A}^{\otimes T} = \bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t$ (cf **produit d'espaces mesurables**).

Soit alors $(E^S, \mathcal{A}^{\otimes S})$, où $S \in \mathcal{P}_f(T)$, une **suite** (finie) d'espaces probabilisables tq :

(a) pour tout $S \in \mathcal{P}_f(T)$, le produit $E_S = \prod_{s \in S} E_s$ est un **espace topologique** muni de sa **tribu borélienne** $\mathcal{A}^{\otimes S} : \sigma(\mathcal{O}(E_S))$, où $\sigma(\mathcal{O}(E_S))$ désigne la **topologie** de E_S ;

(b) si $\mathcal{K} = \mathcal{K}(E_S)$ est la classe des **parties compactes** de E_S , on pose :

$$(1) \quad \mu_S(A) = \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset A} \mu_S(K), \quad \forall A \in \mathcal{A}^{\otimes S}.$$

Le **théorème de S. BOCHNER - A. N. KOLMOGOROV** exprime alors la propriété suivante. Pour qu'il existe une mesure μ_T sur $(E^T, \mathcal{A}^{\otimes T})$ (ie définie sur $\mathcal{A}^{\otimes T}$) tq (cf aussi **projection**) :

$$(2) \quad \mu_S = \text{pr}_{ST}(\mu_T), \quad \forall S \in \mathcal{P}_f(T) \text{ (ie } \mu_S \text{ est la } \textbf{mesure image} \text{ de } \mu_T \text{ par } \text{pr}_{ST}\text{),}$$

il est nécessaire et suffisant que $\{(E_S, \mathcal{A}^{\otimes S}), \mu_S, \text{pr}_{RS}\}$, où $(R, S) \in \mathcal{P}_f(T) \times \mathcal{P}_f(T)$, constitue un **système projectif de probabilités**.

(ii) On appelle alors :

(a) **limite projective** du système projectif de probabilités précédent la mesure μ_T ainsi définie ;

(b) **limite projective** du système projectif d'espaces probabilisés $\{(E_S, \mathcal{A}^{\otimes_S}), \mu_S, \text{pr}_{RS}\}$, dans lequel $(R, S) \in \mathcal{P}_f(T) \times \mathcal{P}_f(T)$, l'espace probabilisé produit $(E^T, \mathcal{A}^{\otimes_T}, \mu_T)$.

On note alors généralement E au lieu de E^T et μ au lieu de μ_T .

(iii) Un exemple important résulte de la propriété suivante : si les espaces $(E_t, \mathcal{O}(E_t))$ sont des **espaces polonais** (où les $\mathcal{O}(E_t)$ désignent leurs **topologies**), les conditions (a) et (b) précédentes sont vérifiées quelles que soient les mesures μ_S , où $S \in \mathcal{P}_f(T)$.