

THÉORÈME DE DOOB (N2)

(03 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Il existe plusieurs théorèmes attribués à J.L. DOOB (cf **théorème d'arrêt**, **théorème de convergence pour des martingales**). Le suivant caractérise les martingales.

Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un **processus stochastique** réel scalaire qui est une (semi-) **martingale** à valeurs dans $\mathcal{X} = \mathbf{R}$.

Le **théorème de J.L. DOOB** exprime que :

(a) la fonction $t \mapsto \mu(t) = E X_t$ est monotone et non décroissante. Elle est constante ssi X est une martingale ;

(b) pour tout $(a, b) \in T_{\leq}^2 = \{(s, t) \in T^2 : s \leq t\}$, on a :

$$(1) \quad E X_a + E |X_t| \leq 2 \cdot E X_b, \quad \forall t \in [a, b] ;$$

(c) soit $t^* \in T$. Si X est une **famille** de variables positives (ie si $\mathcal{X} = \mathbf{R}_+$), la sous-famille $(X_t)_{t \leq t^*}$ est uniformément intégrable ;

(d) soit $s = (s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** sur T tq $s \in T_{\geq}^{\infty}$, avec $T_{\geq}^{\infty} = \{s = (s_n)_{n \in \mathbf{N}} \in T^{\infty} : s_n \geq s_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}\}$. La suite extraite $(X_{s(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ est une **suite uniformément intégrable** ssi :

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} E X_{s(n)} > -\infty.$$

où $s(n)$ désigne aussi bien s_n .