THÉORÈME DE EGOROV (A5, B1, E)
(26 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit (Ω, $\mathcal{T}$, P) un **espace probabilisé**, X = $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de **vars** $X_n : \Omega \mapsto \overline{\mathbf{R}}$ et X_∞ une variable de même nature que les précédentes.

Le **théorème de V.A. EGOROV** consiste en la propriété (équivalence) suivante :

(1) $X_n \to^{P\text{-p.s.}} X_\infty \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists A_\varepsilon$ vérifiant $P(A_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ et $X_n \to^{u} X_\infty$ sur $A_\varepsilon\}$,

où u dénote la **convergence uniforme**.

Ce théorème est une version « probabiliste » du théorème suivant, classique en **théorie de la mesure**.

(ii) Soit E un **espace localement compact**, F un **espace métrisable** et μ une **mesure de RADON** positive sur E. Soit f = $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** d'**applications** μ-mesurables $f_n : E \mapsto F$ et $f_\infty : E \mapsto F$ une application tq, localement (ie sur tout **ouvert** $U \subset E$) :

(2) $\lim f_n = f_\infty$, (μ-p.p.).

Alors (**théorème de V.A. EGOROV**) :

(a) f_∞ est μ-mesurable ;

(b) pour tout compact $K \subset E$ et tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, il existe un **compact** $L \subset K$ tq $\mu(K \setminus L) \leq \varepsilon$ et tq les **restrictions** $f_{n/L}$ des f_n à L sont continues et convergent vers $f_{\infty/L}$ uniformément sur L, ie :

(1) $f_{n/L} \to^{u} f_{\infty/L}$.