THÉORÈME DE FRISH - WAUGH (A5, C1, C4, H2, J1, J7)
(22 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Il existe deux versions classiques du **théorème de FRISH - WAUGH**.

(i) **Théorème de R. FRISH - F.V. WAUGH** (**version dans L^2**). Soit η_i (i = 1, 2) et ξ_1 ,..., ξ_K une **suite** de **vars**, toutes éléments de $L_{\mathbf{R}}^2$ (Ω, $\mathcal{T}$, P). Pour tout i $\in N_2^* = \{1, 2\}$, on note $\eta_i^\wedge$ l'**estimateur par régression** affine de η_i sur le vecteur $\xi = (\xi_1 ,..., \xi_K)$, ie la **projection** orthogonale (au sens de $L_{\mathbf{R}}^2$) de η_i sur le sous-**espace de HILBERT** de $L_{\mathbf{R}}^2$ engendré par la suite $\{1, \xi_1 ,..., \xi_K\}$ ou 1 désigne la **va constante** égale à l'unité de **R**.

Alors, l'estimateur $b_{12}^\wedge$ de b_{12} dans la régression :

(1) $\quad \eta_1 - \eta_1^\wedge = b_{12} . (\eta_2 - \eta_2^\wedge) + \varphi$

est identique à celui de b^{12} dans la régression affine suivante :

(2) $\quad \eta_1 = b_0 . 1 + b^{12} . \eta_2 + \Sigma_{k=1}^K b_k . \xi_k + \psi$.

(ii) **Théorème de R. FRISH - F.V. WAUGH** (**version dans $\mathbf{R}^N$**). On considère le **modèle de régression linéaire** multiple (dans l'**espace des observations**) :

(3) $\quad y = X b + u, \qquad$ avec $Eu = 0, \; V u = \sigma^2 I_N$,

dans lequel u et y sont à valeurs dans $\mathbf{R}^N$, $X \in M_{NK}$ (**R**) et rg X = K. On suppose le modèle (3) « partitionné » selon :

(3)' $\quad y = X^1 b^1 + X^2 b^2 + u$,

où $X^i \in M_{N,K(i)}$ (**R**) (i = 1, 2) et $b^i \in \mathbf{R}^{K(i)}$ (i = 1, 2), avec $K_1 + K_2 = K$ et $1 \leq K_1 \leq K-1$ (où N(i) désigne N_i , i = 1, 2).

On définit la **procédure** d'estimation suivante :

(a) partitionnement de l'**estimateur des moindres carrés ordinaires** $b^\wedge = (X' X)^{-1} X' y$ de b dans (3) comme b, soit $b^\wedge = (b_1^\wedge, b_2^\wedge)$. On note $u^\wedge$ l' « estimateur » (**résidu**) de u sur le modèle (3) ainsi obtenu ;

(b) application de la **méthode des moindres carrés ordinaires** sur la régression de chaque colonne x_k (k = 1,..., K_1) de X^1 sur X^2 selon :

(4) $\quad x_k = X^2 a_k + v_k , \qquad k = 1,..., K_1$,

ce qui conduit à la (K_2 , K_1)-matrice contenant les **estimateurs des mco** $a_k^\wedge$ des a_k , ie :

(5) $\quad A^\wedge = [a_1^\wedge ,..., a_{K(1)}^\wedge]$;

où K(1) désigne K_1 ;

(c) régression linéaire, par la méthode des mco, de y sur les **« pseudo-observations »** exogènes $X^1 - X^2 A^\wedge$:

$$(6) \qquad y = (X^1 - X^2 A^\wedge) c + w,$$

ce qui conduit aux estimateurs $c^\wedge$ de c et $w^\wedge$ de w.

Le théorème s'exprime par les **identités** suivantes :

$$(7) \qquad \begin{aligned} c^\wedge &= (b^1)^\wedge && \text{(identités entre estimateurs),} \\ w^\wedge &= u^\wedge && \text{(identités entre résidus).} \end{aligned}$$

(ii) L'interprétation géométrique du théorème est simple. Ses applications concernent principalement le **modèle de régression**.