

THÉORÈME DE FUBINI (A5)

(04 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **théorème de FUBINI** est un théorème classique de la **théorie de l'intégration**, qui précise les conditions sous lesquelles on peut intervertir deux **intégrations** successives.

(i) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $(F, \mathcal{B}, \nu)$ deux **espaces mesurés** tq μ (resp ν) est une **mesure σ -finie** sur $\mathcal{A}$ (resp $\mathcal{B}$). Soit $f : E \times F \mapsto \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) une fonction $(\mu \otimes \nu)$ -intégrable dont on note $f_1 : x \mapsto f_1(x) = f(x, y)$ la première application partielle et $f_2 : y \mapsto f_2(y) = f(x, y)$ la seconde application partielle.

On établit alors les résultats suivants, appelés **théorème de G. FUBINI** :

(a) f_1 est μ -intégrable ν -p.p. ;

(b) f_2 est ν -intégrable μ -p.p. ;

(c) la fonction $x \mapsto \int f_2 d\nu$ (définie μ -p.p.) est μ -intégrable, et la fonction $y \mapsto \int f_1 d\mu$ (définie ν -p.p.) est ν -intégrable ;

(d) **formule(s) de G. FUBINI** :

$$(1)_a \quad \int f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int \left\{ \int f_2(y) d\nu(y) \right\} d\mu(x) = \int \left\{ \int f_1(x) d\mu(x) \right\} d\nu(y),$$

ou, de façon équivalente :

$$(1)_b \quad \int f d(\mu \otimes \nu) = \int \left\{ \int f_2 d\nu \right\} d\mu = \int \left\{ \int f_1 d\mu \right\} d\nu.$$

(ii) Le théorème précédent se généralise directement au cas de plusieurs espaces mesurés $(E_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)_{i=1, \dots, n}$ dont les mesures μ_i sont supposées σ -finies.

Si la fonction $f : E \mapsto \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) est intégrable pr à la mesure $\bigotimes_{i=1}^n \mu_i$, avec $E = \prod_{i=1}^n E_i$ et $\mathcal{A} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$, alors :

(a) les applications partielles $f_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n) : x_i \mapsto \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$), définies sur E_i et à valeurs dans $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) sont μ_i -intégrables, pour tout $i = 1, \dots, n$;

(b) les fonctions $(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n) \mapsto \int f_i d\mu_i(x_i)$ sont μ_i -intégrables et définies $(\bigotimes_{j=1}^n (j \neq i) \mu_j)$ -presque partout ;

(c) **formule(s) de FUBINI généralisée(s) :**

$$(2) \quad \int f \, d\mu = \int \left\{ \int f_i \left(\bigotimes_{j=1}^n \mu_j \right) d\mu_i \right\} d\mu_i .$$

(iii) Les formules s'étendent aussi directement aux cas :

(a) d'une fonction f vectorielle (à valeurs dans $\mathbf{R}^k$ ou dans $\mathbf{C}^k$) ;

(b) d'une fonction matricielle (à valeurs dans $M_{qr}(\mathbf{R})$ ou dans $M_{qr}(\mathbf{C})$).