THÉORÈME DE KARLIN - RUBIN (I4)
(22 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Le **théorème de KARLIN - RUBIN** caractérise les **tests** fondés sur des **va** dont la **loi de probabilité** est à **rapport de vraisemblances monotone**.

On considère un **problème de test** paramétrique dans lequel $\Theta \subset \mathbf{R}$. On cherche à tester l'**hypothèse de base** (dans laquelle $\theta_0 \in \Theta$ est donné) :

(1) $H_0 : \theta \in \Theta_0$, avec $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta \leq \theta_0\}$,

contre l'hypothèse secondaire (ie l'**alternative** complémentaire) :

(2) $H_1 : \theta \in \Theta_1$, avec $\Theta_1 = \Theta^c$.

Si la **loi** de la **vars** (ou **statistique**) $X : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ est à **rapport de densités monotone** (ou à rapport de vraisemblances monotone), le **théorème de S. KARLIN - H. RUBIN** affirme alors que tout test φ tq :

$$(3) \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{ssi } x > x_0 , \\ \gamma & \text{ssi } x = x_0 \text{ (où } \gamma \text{ est quelconque dans }]0,1[), \\ 0 & \text{ssi } x < x_0 , \end{cases}$$

vérifie les propriétés suivantes :

(a) la **fonction puissance** associée à φ est non décroissante ;

(b) si l'on suppose que φ est un test dont le **seuil** est $\alpha \in]0, 1[$ (ie si $\sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta \varphi(x) = \alpha$), φ est un **test uniformément le plus puissant** pour tester H_0 contre H_1 et ceci pour tout $\theta_0 \in \Theta$;

(c) pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et tout $\theta_0 \in \Theta$, il existe un point $x_0 \in \mathbf{R}$ et une **constante** $\gamma \in]0, 1[$ tq φ est uniformément le plus puissant de niveau α pour tester H_0 contre H_1 .