

THÉORÈME DE KHINTCHINE (A9, C5, N2, N7)

(31 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

L'important **théorème de KHINTCHINE** exprime la fonction de covariance (ou la fonction d'autocovariance) d'un processus comme **transformée de FOURIER** d'une **mesure** particulière.

(i) Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un **processus stochastique** complexe scalaire tq :

(a) $T = \mathbf{Z}$ (processus en **temps** discret) ;

(b) X est un **processus stationnaire en covariance** (ie au sens large) et centré, ie :

$$(1) \quad \begin{aligned} E X_t &= 0, \quad \forall t \in T, \\ t \in T \mapsto \gamma(t) &= E X_{s+t} \bar{X}_s, \quad \forall s \in T, \end{aligned}$$

où γ est la **fonction d'autocovariance** de X (cf aussi **fonction de covariance**).

Si l'on pose $I = [-\pi, +\pi]$, le **théorème de A.Y. KHINTCHINE** affirme alors l'existence d'une mesure F , unique, finie, définie sur $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ et tq :

$$(2) \quad \gamma(t) = \int e^{iut} dF(u), \quad \forall t \in T.$$

De plus, le **support** de F est I : $\text{Supp } F = I$.

Inversement, si la propriété (1) est vérifiée et si $\text{Supp } F = I$, alors γ est la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire X .

(ii) Le théorème précédent a été généralisé. Ainsi, lorsque $T = \mathbf{R}^M$ et que X est un **champ homogène** sur E (cf **champ aléatoire**), ie un **processus** vérifiant les propriétés suivantes :

$$(3) \quad \begin{aligned} t \in T \mapsto E X_t &= \mu && (\text{indépendance pr à } t) \text{ (souvent } \mu = 0 \text{)} ; \\ \gamma(t) &= E X_{s+t} \bar{X}_s, \quad \forall t \in T && (\text{fonction d'autocovariance}). \end{aligned}$$

Alors si X est continu en moyenne quadratique (cf **processus continu dans L^p**), la formule (1) devient :

$$(4) \quad \gamma(t) = \int \mathbf{1}(\mathbf{R}^M) e^{it'u} dF(u), \quad \forall t \in T,$$

où $t'u = \sum_{m=1}^M t_m u_m$ désigne le **produit scalaire** dans $\mathbf{R}^M$ et $\mathbf{1}(B) = \mathbf{1}_B$ la **fonction indicatrice** d'une **partie** $B \subset \mathcal{B}(\mathbf{R}^M)$ (**tribu borélienne** de $\mathbf{R}^M$).

(iii) Les formules (1) et (4) sont appelées formules de **représentation spectrale de A.Y. KHINTCHINE** (comparer à **représentation spectrale de CRAMER**) et F est appelée **fonction de répartition spectrale** ou **mesure spectrale** de X (cf **fonction de répartition spectrale**).

Dans le cas d'un processus stationnaire ou d'un champ homogène, la **densité spectrale** est définie comme suit (cf **densité spectrale**). Si F est une **mesure absolument continue** pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_1 (resp λ_M), la **dérivée de NIKODYM-RADON** :

$$(5) \quad f = dF / d\lambda_1 \quad (\text{resp } f = dF / d\lambda_M)$$

de F pr à λ_1 (resp pr à λ_M) est appelée **densité spectrale** du processus X .

Par suite, (1) s'écrit :

$$(6) \quad \gamma(t) = \int e^{iut} f(u) du, \quad \forall t \in T,$$

et (4) s'écrit :

$$(7) \quad \gamma(t) = \int \mathbf{1}(\mathbf{R}^M) e^{it^t u} f(u) du, \quad \forall t \in T.$$

où du désigne la notation simplifiée pour $d\lambda_1(u)$ (resp $d\lambda_M(u)$).

Dans le cas d'un champ homogène, on montre que, si γ appartient à $\mathcal{L}_c^1(\mathbf{R}^M, \mathcal{B}(\mathbf{R}^M), \lambda_M)$, la densité de X existe toujours.

(iv) Enfin, on appelle parfois **théorème de A.Y. KHINTCHINE - N. WIENER** la propriété selon laquelle la fonction d'autocovariance γ définie en (1) associée à un processus stationnaire est une **fonction de type positif**.