THÉORÈME DE KOENIG (C5, F3)
(04 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **théorème de König** est un théorème classique de décomposition d'une **dispersion** pr à un point arbitraire.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}^K}^2 (\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **vecteur aléatoire** (à valeurs dans $\mathbf{R}^K$) de carré intégrable.

Alors, pour tout point $\alpha \in \mathbf{R}^K$, la **formule de S. KOENIG**, ou **formule de S. KÖNIG**, ou **formule de C. HUYGENS - S. KOENIG**, peut se présenter sous deux formes :

(a) forme matricielle :

(1) $$Q(\alpha) = E(\xi - \alpha)(\xi - \alpha)' = E(\xi - E\,\xi)(\xi - E\,\xi)' + (E\,\xi - \alpha)(E\,\xi - \alpha)' ;$$

(b) forme scalaire :

(2) $$q(\alpha) = E\,\|\xi - \alpha\|^2 = E\,\|\xi - E\,\xi\|^2 + E\,\|E\,\xi - \alpha\|^2.$$

(ii) En particulier, si X est un **échantillon aléatoire** constitué de N **répliques** indépendantes de la **variable parente** ξ précédente, et si l'**espérance** E est calculée à l'aide de la **probabilité empirique** P_N fondée sur X, on définit les équivalentes « empiriques » des décompositions « théoriques » (1) et (2).

(iii) La formule de KOENIG est à rapprocher de la définition de l'**écart quadratique moyen**.

(iv) On montre que :

(a) $Q(\alpha)$ est minimum (au sens des formes quadratiques) au point moyen $\tilde{\alpha} = E\,\xi$, ie :

(3) $$h'\,Q(\tilde{\alpha})\,h \leq h'\,Q(\alpha)\,h, \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{R}^K \text{ tq } \alpha \neq \tilde{\alpha} \text{ et } \forall\, h \in \mathbf{R}^K ;$$

(b) $q(\alpha)$ est minimum au point moyen $\tilde{\alpha} = E\,\xi$, ie :

(4) $$q(\tilde{\alpha}) \leq q(\alpha), \quad \forall\, \alpha \in \mathbf{R}^K \text{ tq } \alpha \neq \tilde{\alpha}.$$