THÉORÈME(S) DE KOLMOGOROV (B1, B4, C4, E, N)
(29 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Il existe de nombreux résultats connus sous le nom de **théorème de A.N. KOLMOGOROV**. Les suivants figurent parmi les plus classiques.

(i) **Loi un-zéro de KOLMOGOROV**. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite indépendante** constituée de **variables aléatoires** scalaires complexes $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{C}$. On note $\mathcal{P}_\infty$ une **propriété asymptotique** susceptible d'être vérifiée par X et A l'**événement** suivant :

(1) $\quad A = \{\omega \in \Omega : x = X(\omega) \text{ vérifie } \mathcal{P}_\infty\}$,

où $X(\omega) = (X_n(\omega))_{n \in \mathbf{N}} = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} = x$.

La **loi zéro - un de A.N. KOLMOGOROV** s'exprime alors par ;

(2) $\quad P(A) \in N_1, \qquad$ où $N_1 = \{0, 1\}$.

Autrement dit, la probabilité pour que $\mathcal{P}_\infty$ soit une propriété asymptotique pour X vaut soit 0 (fausse), soit 1 (vraie). Ce résultat intervient souvent en **théorie des processus**.

(ii) **Condition suffisante d'existence d'une limite pour un système projectif de probabilités**. Ce très important théorème permet de construire une **mesure de probabilité** sur un espace de dimension infinie. On en présente trois versions :

(a) soit $(\Omega_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ (I quelconque) une **famille** d'**espaces localement compacts** et, pour tout $i \in I$, $\mathcal{T}_i = \sigma(\mathcal{O}_i)$ la **tribu borélienne** de l'espace $(\Omega_i, \mathcal{O}_i)$. On note Φ l'ensemble $\{J \subset I : \text{card } J < +\infty\}$ des **parties** finies de I et, pour tout $J \in \Phi$, P^J une (mesure de) probabilité de RADON définie sur l'espace produit (fini et localement compact) $\Omega^J = \prod_{j \in J} \Omega_j$ (cf **mesure produit**). Alors, le **système projectif de probabilités** $(P^J)_{J \in \Phi}$ admet une **limite projective**, et celle-ci est unique ;

(b) dans le cas réel où $\Omega_i = \mathbf{R}$, pour tout $i \in I$, et $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i = \mathbf{R}^I$, on note $\mathcal{T} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{T}_i = (\mathcal{B}_{\mathbf{R}})^{\otimes I}$ la **tribu** produit et l'on suppose que, pour toute suite finie $(i_1, \ldots, i_n) \in I^n$, et tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe une **suite** de **mesures de probabilité** $P_{i(1),\ldots,i(n)}$, resp définies sur $\mathcal{T}_{i(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{T}_{i(n)}$, qui lui est « compatible » (ou « adaptée »), ie tq (en notant par commodité $i(\alpha)$ pour i_α) :

(3) $\quad P_{i(1),\ldots,i(n)}(A) = P_{i(1),\ldots,i(n),i(n+1)}(A \times \mathbf{R}), \quad \forall A \in \bigotimes_{\alpha=1}^{n} \mathcal{T}_{i(\alpha)}$,

quelle que soit la suite finie $(i_1, \ldots, i_n) \in I^n$ et quel que soit l'entier $n \in \mathbf{N}^*$. Alors, il existe sur $(\mathbf{R}^I, \mathcal{T})$ une (mesure de) probabilité, unique, dont la **projection** sur tout sous-espace (produit) $\Pi_{\alpha=1}^{n}$ (**R**, $\mathscr{T}_{i(\alpha)}$) n'est autre que $P_{i(1),...,i(n)}$ (cf **produit d'espaces probabilisables**) ;

(c) on cherche souvent à construire sur un espace probabilisé (Ω, $\mathscr{T}$, P) une suite X = $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ constituée de va $X_n : \Omega \mapsto \overline{\mathbf{R}}$ (droite numérique achevée) en sorte que, pour tout n $\in$ **N**, la **loi jointe** du (n+1)-uple X(n) = (X_0 , X_1 ,..., X_N) est égale à une mesure de probabilité Π_n donnée a priori. On suppose que la suite $\Pi = (\Pi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de ces probabilités vérifie la **propriété de projectivité** suivante (les X(n) désignent les X_n) : pour tout entier n $\in$ **N** et tout entier p $\in$ N_n = {0, 1 ,..., n}, l'image de la loi $P^{X(n)} = \mathscr{L}(X_n)$ par la projection $pr_{np} : \overline{\mathbf{R}}^{n+1} \mapsto \overline{\mathbf{R}}^{p+1}$ ($p \leq n$) définie par :

(4) $\quad pr_{np} (x_0 , x_1 ,..., x_N) = (x_0 , x_1 ,..., x_p)$

n'est autre que la loi $P^{X(p)} = \mathscr{L}(X_p)$. Autrement dit, on suppose que :

(3)' $\quad pr_{np} (P^{X(n)}) = P^{X(p)}, \qquad \forall\ p \in N_n$ et $\forall\ n \in \mathbf{N}$.

Cette version du **théorème de A.N. KOLMOGOROV** est contenue dans la propriété suivante. Quelle que soit la suite Π de probabilités Π_n resp définies sur les espaces $\overline{\mathbf{R}}^{n+1}$ (où n parcourt **N**) et vérifiant la propriété de projectivité (3)' précédente, il existe une **mesure de probabilité** unique P définie sur $\mathscr{T}$ et tq :

(5) $\quad X_n (P) = P^{X(n)} = \Pi_n , \qquad \forall\ n \in \mathbf{N}$.

Autrement dit, l'image $P^{X(n)} = \mathscr{L}(X_n)$ de P par X_n n'est autre que Π_n , pour chacun des indices n $\in$ **N**.

A titre d'exemple, l'**espace probabilisable** ($\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $\mathscr{B}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$) (produit infini dénombrable) (ie l'espace des suites réelles) peut être probabilisé par la (mesure de) probabilité P^X, image (au sens précédent) de P par la suite X = $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Cette image P définit la **loi de probabilité** de la suite aléatoire X.

Une version analogue de ce résultat existe pour des **vecteurs aléatoires**, ie pour des variables $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$.

Cette propriété explique l'importance de ce théorème dans des branches importantes du **calcul des probabilités** et de la **Statistique** : suites de **variables aléatoires**, **échantillonnage**, **théorie séquentielle**, **théorie des processus**.

(iii) **Théorème ergodique de A.N. KOLMOGOROV**. Ce théorème est une version, adaptée aux processus stochastiques, du **théorème de BIRKHOV**.

On considère un processus X = {(Ω, $\mathscr{T}$, P), (**R**, $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$), $(X_t)_{t \in T}$} tq :

(a) X est en **temps** discret, avec T = **N*** ;

(b) X est un **processus strictement stationnaire** ;

(c) $X_n \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1 (\Omega, \mathscr{T}, P)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$ (processus « intégrable »).

Alors, il existe une variable aléatoire notée $\overline{X}_\infty$, élément de $\mathscr{L}_{\mathbf{R}}^1$, tq la suite des **moyennes empiriques** :

(6) $\overline{X}_N = N^{-1} \Sigma_{n=1}^N X_n$

converge fortement vers $\overline{X}_\infty$, ie (cf **convergence forte**) :

(7) $\overline{X}_N \rightarrow \overline{X}_\infty$ (P-p.s.).

De plus, on a :

(8) $E\ \overline{X}_\infty = E\ X_n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

Un exemple classique est le suivant. Si $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une **suite iid** selon une loi commune P^ξ, avec $E\ \xi < \infty$, on déduit de ce théorème la convergence suivante :

(9) $\overline{X}_N = N^{-1} \Sigma_{n=1}^N X_n \rightarrow E\ \xi$ (P-p.s.).