THEOREME DE LEBESGUE (A5)

(03 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **théorème de LEBESGUE** est un théorème fondamental de la **théorie de la mesure**, omniprésent en **calcul des probabilités** et en **Statistique**.

(i) Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un **espace mesuré**, $f = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** de fonctions mesurables $f : E \mapsto \overline{\mathbf{R}}$ (droite numérique achevée) (cf **application mesurable**) et g une fonction positive μ-intégrable qui **domine** la suite f, ie qui est tq :

(1) $\quad |f_n| \leq g \qquad (\mu\text{-p.p.}), \forall n \in \mathbf{N}.$

Si la suite f est μ-p.p. convergente (cf **convergence presque partout**) et que sa limite est notée f_∞ , le **théorème de H.L. LEBESGUE** exprime la propriété suivante :

(2) $\quad \int (\lim_n \mu\text{-p.p. } f_n)\, d\mu = \int f_\infty\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu.$

Ce théorème est souvent appelé **théorème de la convergence dans le cas dominé**, ou **théorème de (la) convergence dominée**. Il montre que, sous les conditions indiquées, on peut intervertir l'opération d'intégration et celle de limite presque partout.

(ii) La propriété (2) entraîne :

(3) $\quad \int_A f_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_\infty\, d\mu \qquad$ (uniformément sur $\mathscr{A}$).

(iii) Le théorème de LEBESGUE est encore valide lorsque l'ensemble **N** des **indices** est remplacé par une **partie** $T \subset \overline{\mathbf{R}}$ et que l'on étudie la limite lorsque $t \rightarrow t_0$ (donné), où $(t, t_0) \in T^2$.

Il est encore vrai lorsque f est une suite de **variables aléatoires** réelles.

Enfin, il se généralise dans le cadre de l'**intégrale d'une fonction vectorielle**.