

THÉORÈME DE LEBESGUE - NIKODYM (A5)

(04 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **théorème de LEBESGUE-NYDKODYM** est un théorème classique de décomposition d'un **mesure**.

(i) Soit $(E, \mathcal{A})$ un **espace mesurable**, μ une **mesure positive** σ -finie (cf **mesure σ -finie**) définie sur $\mathcal{A}$ et ν une mesure positive définie sur $\mathcal{A}$.

Le **théorème de H.L. LEBESGUE - O. NIKODYM**, ou **théorème de H.L. LEBESGUE - O. NIKODYM - J.K. RADON**, affirme alors l'existence d'une classe $f \sim$, unique, constituée de fonctions $f \in \mathcal{M}(E, \bar{\mathbb{R}}_+)$ (espace des fonctions mesurables positives), ie de fonctions $\mathcal{A}$ -mesurables et μ -équivalentes, ainsi qu'une mesure unique λ , étrangère à μ (cf **mesures étrangères**), tq :

$$(1) \quad \nu = f \cdot \mu + \lambda, \quad \forall f \in f \sim \text{ (classe de } \mu\text{-équivalence)}.$$

(ii) D'un point de vue terminologique, on dit que :

(a) la mesure :

$$(2) \quad \nu_c = f \cdot \mu$$

est la **partie μ -continue de ν** , ou la **partie absolument continue (pr à μ) de ν** ;

(b) la mesure :

$$(3) \quad \nu_s = \lambda$$

est la **partie μ -singulière de ν** , ou la **partie singulière (pr à μ) de ν** .

(c) la (classe de) fonction(s) $f \in f \sim$ est appelée **densité** de ν pr à μ (cf **densité**), et l'on écrit :

$$(4) \quad f = d\nu / d\mu, \quad \forall f \in f \sim.$$

(iii) Ce théorème vaut notamment pour des **mesures de probabilité** ou pour des **lois de probabilité** (cf aussi **probabilité**).

Il fonde l'existence d'une décomposition de même type (mais ponctuelle et non plus ensembliste) pour les fonctions de répartition associées à des probabilités (cf aussi deuxième **théorème de RIESZ**).