THÉORÈME DE LÉVI (A5)
(22 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit (E, $\mathscr{A}$, μ) un **espace mesuré** et f = $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** de fonctions $\mathscr{A}$-mesurables positives, croissant vers une limite notée f_∞ (cf **application mesurable**, **convergence simple**).

Le **théorème de B. LÉVI** exprime l'égalité suivante entre limites (interversion entre intégration et passage à la limite) :

(1) $\int \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu$.

Autrement dit, en notant $I_n = \int f_n \, d\mu$, on a $I_\infty = \lim_n I_n$.

(ii) Ce théorème comporte le corollaire utile suivant. Soit (E, $\mathscr{A}$, μ) un espace mesuré et $\mathscr{M}$ (E, $\overline{\mathbf{R}}_+$) l'espace des fonctions mesurables positives de E dans $\overline{\mathbf{R}}_+$. Alors, quelle que soit la suite f = $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions $f_n \in \mathscr{M}$ (E, $\overline{\mathbf{R}}_+$), on a :

(2) $\int \{\Sigma_{n \in \mathbf{N}} f_n\} \, d\mu = \Sigma_{n \in \mathbf{N}} \{\int f_n \, d\mu\}$.