THÉORÈME DE LÉVY (C5, E)

(14 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **théorème de P.P. LÉVY** associe des **suites** de **variables aléatoires**, ou des suites de **lois de probabilité**, à des suites de **fonctions caractéristiques** (fc) en termes de **convergence en loi** et de **convergence uniforme**.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace mesurable** et $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'**éléments aléatoires**, ie une suite d'**applications mesurables** $X_n : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ ($\forall n \in \mathbf{N}$). On note ($\forall n \in \mathbf{N}$) $\mathcal{L}(X_n)$ la **loi de probabilité** de la variable X_n et $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite des fc φ_n resp associées aux $\mathcal{L}(X_n)$.

On présente ici trois versions du théorème.

(i) **Première version (scalaire)**. On suppose que $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$, donc que X est une suite de **vars** $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}$, et que $\mathcal{L}(X_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(X_\infty)$ (**convergence en loi** de X , ie la suite des $\mathcal{L}(X_n)$ converge vers la loi $\mathcal{L}(X_\infty)$ d'une **va** « limite » X_∞).

Le **théorème de P.P. LÉVY** affirme que la suite φ converge uniformément, dans tout intervalle borné $[-T, +T]$, vers la fc de $\mathcal{L}(X_\infty)$, et ceci que la **fonction de répartition** F_∞ de X_∞ soit continue ou non.

(ii) **Seconde version (vectorielle)**. On suppose que $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}^K, \mathcal{B}(\mathbf{R}^K))$, donc que X est une suite de **vecteurs aléatoires** réels $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$.

Le **théorème de P.P. LÉVY** réside alors dans les trois propositions suivantes :

(a) si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_\infty$ (**convergence légale**) et si X_∞ admet φ_∞ pour fc, on a la **convergence simple** (ie ponctuelle) des fc, ie :

$$(0) \quad \lim_n \varphi_n(t) = \varphi_\infty(t) = \varphi_{X_\infty}(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}^K,$$

où X_∞ dénote (par commodité) X_∞ .

Autrement dit :

$$(1) \quad \mathcal{L}(X_n) \rightarrow \mathcal{L}(X_\infty) \Rightarrow \lim_n \varphi_n = \varphi_{X_\infty};$$

(b) inversement, s'il existe une fonction $\varphi_\infty : \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{C}$ continue à l'origine $0 \in \mathbf{R}^K$ et tq $\lim_n \varphi_n = \varphi_\infty$ (convergence simple), alors φ_∞ est la fc d'un vecteur aléatoire X_∞ et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_\infty$.

Autrement dit :

$$(2) \quad \lim_n \varphi_n = \varphi_\infty \text{ (continue en 0)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(X_n) \rightarrow \mathcal{L}(X_\infty);$$

(c) de plus, pour tout $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^K)$ (classe des **parties compactes** de $\mathbf{R}^K$), la convergence $\varphi_n \rightarrow \varphi_{X_\infty}$ est uniforme sur K , ie :

$$(3) \quad \varphi_{n/K} \xrightarrow{u} \varphi_{X_\infty/K}, \quad \forall K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^K),$$

où $f_{/K}$ dénote la **restriction** d'une fonction quelconque $f : \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{C}$ à tout compact K .

(iii) **Troisième version.** On suppose encore que $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}^K, \mathcal{B}(\mathbf{R}^K))$, donc que X est une suite de **vecteurs aléatoires** réels $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$. On note $\mu = (\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de **mesures positives** bornées définies sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^K)$ (cf **mesure bornée**) et $\mu_n^\wedge$ la **transformée de FOURIER** de μ_n ($\forall n \in \mathbf{N}$).

Le **théorème de P.P. LÉVY** établit alors la preuve que, s'il existe une mesure positive ϕ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$(4) \quad \lim \mu_n = \phi \quad (\text{convergence simple sur } \mathbf{R}^K)$$

et :

$$(5) \quad \phi \text{ est continue au point } 0 \in \mathbf{R}^K$$

alors il existe une mesure positive bornée μ_∞ tq :

$$(a) \quad \mu_\infty = \phi;$$

(b) la suite μ tend étroitement vers μ_∞ (cf **convergence étroite**).

(iv) Le théorème de LÉVY est aussi appelé :

(a) **théorème de H. CRAMER** (cf **théorème de CRAMER**, § (ii)) ;

(b) ou **théorème de la première limite**.

Il peut se comparer au **théorème de DUGUÉ** ou au **théorème de GLIVENKO**.