THÉORÈME DE NEYMAN - PEARSON (G4, I1, I2, I4)
(05 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **théorème de J. NEYMAN - E.S. PEARSON** est un résultat fondamental **théorie des tests** (cf **test d'hypothèses**). On en présente ci-après une forme élémentaire et une forme généralisée.

Soit ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{P}^X$) un **modèle image**. On suppose ce **modèle dominé** par une **mesure positive** σ-finie μ (cf **famille de lois dominée**, **mesure σ-finie**).

(i) **Forme élémentaire**. On considère un problème de test entre deux **hypothèses simples** $H_0 : \theta = \theta_0$ et $H_a : \theta = \theta_a$, où l'on suppose que $\mathscr{P}^X = (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ (forme paramétrée) et que $\theta_0 \in \Theta$ et $\theta_a \in \Theta$ sont donnés.

Le théorème affirme alors que :

(a) quel que soit $\alpha \in [0, 1]$, il existe un **test de NEYMAN** φ tq :

(1) $E_0\, \varphi\, (X) = \alpha$ (test de **niveau** α),

où E_0 désigne $E_{\theta 0}$ (**espérance** calculée avec la valeur θ_0 de θ).

Pour un tel test, on peut poser :

(2) $\varphi\,(x) = \gamma \in\,]0, 1[$ (**constante**)

lorsque $f_1 = k\, .\, f_0$ (μ-p.p.), où μ domine le modèle considéré ;

(b) le test φ est un **test de NEYMAN** ssi :

(3) $E_1\, \varphi\, (X) \geq E_1\, \psi\, (X)$, $\forall\, \psi$ tq $E_0\, \psi\, (X) \leq E_0\, \varphi\, (X)$.

(ii) **Forme généralisée** (**H. CHERNOFF - H. SCHEFFÉ**). On suppose que θ_1 ,..., θ_m est une **suite** finie de valeurs du **paramètre** θ et l'on note P_i^X pour désigner $P_{\theta(i)}^X$ et $\theta(i)$ pour désigner θ_i (i = 1 ,..., m). La suite $(P_i^X)_{i\, =\, 1\, ,...,\, m}$ est encore supposée uniformément dominée par μ, et l'on note alors $f_i = dP_i^X / d\mu$ la densité de P_i^X pr à μ.

Si Δ représente l'**ensemble** des tests $\varphi : \mathscr{X} \mapsto [0, 1]$, on pose :

(4)
$$\mathscr{P}_{m-1} = \{E_1\, \varphi\, (X) ,..., E_{m-1}\, \varphi\, (X)) : \varphi \in \Delta\},$$
$$\mathscr{P}_m = \{E_1\, \varphi\, (X) ,..., E_m\, \varphi\, (X)) : \varphi \in \Delta\},$$

pour définir le **diagramme des puissances** resp dans $\mathbf{R}^{m-1}$ et dans $\mathbf{R}^m$, où l'on note comme précédemment E_i pour désigner $E_{\theta(i)}$ (espérance calculée avec la probabilité $P_i = P_{\theta(i)}$ dont l'image par X est P_i^X).

Alors :

(a) il existe un test φ solution du problème de **programmation mathématique** suivant :

$$(5) \quad \begin{cases} \max E_m \, \varphi(X) \\ \text{sous } E_i \, \varphi(X) = c_i \text{ (constante donnée)}, \ \forall \, i \in (1, \ldots, m-1), \end{cases}$$

où $c = (c_1, \ldots, c_{m-1}) \in \mathscr{P}_{m-1}$;

(b) si un test φ vérifie les **contraintes** du programme (5) et qu'il est de la forme suivante (où les inégalités sont vraies μ- p.p.) :

$$(6) \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ ssi } f_m > \Sigma_{i=1}^{m-1} k_i \, . \, f_i \, , \\ 0 \text{ ssi } f_m < \Sigma_{i=1}^{m-1} k_i \, . \, f_i \, , \end{cases}$$

alors φ maximise $E_m \, \varphi(x)$ sous ces mêmes contraintes ;

(c) si un test φ vérifie les contraintes du programme (5) et qu'il est de la forme (6) ci-dessus (avec $k_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m-1$), alors φ maximise $E_m \, \varphi(X)$ sous les contraintes :

$$(7) \quad E_i \, \varphi(X) \leq c_i \, , \qquad \forall \, i = 1, \ldots, m-1,$$

où $c = (c_1, \ldots, c_{m-1})' \in \mathscr{P}_{m-1}$;

(d) si $\gamma \in \text{Int } \mathscr{P}_{m-1}$ (**intérieur** de $\mathscr{P}_{m-1}$), alors il existe un test φ de la forme (6) vérifiant les contraintes de (5), et tout test maximisant $E_m \, \varphi(X)$ sous ces contraintes est de la forme (6).

(iii) La forme généralisée du théorème permet de traiter les problèmes de tests bilatéraux de la forme (cf **test bilatéral**) :

$$(6)' \quad \Theta_0 = \{\theta : \theta \leq \theta_-\} \cup \{\theta : \theta \geq \theta_+\},$$

dans laquelle $(\theta_-, \theta_+) \in \Theta^2$, avec $\theta_- < \theta_+$ et $\Theta \subset \mathbf{R}$.

En effet, dans ce cas, lorsque $\mathscr{P}^X$ est une **famille exponentielle** tq :

$$(9) \quad \begin{cases} (dP_\theta^X / d\mu)(x) = c(\theta) \, e^{a(\theta) \, . \, t(x)}, \\ V_\theta \, t(X) > 0, \ \forall \, \theta \in \Theta, \end{cases}$$

il existe un test φ, **test uniformément le plus puissant** au seuil α, de la forme :

$$(10) \quad \begin{cases} 1 \text{ ssi } c_- < t(x) < c_+ \, , \\ \gamma_- \text{ ssi } c_- = t(x), \end{cases}$$

γ_+ ssi $t(x) = c_+$,

0 ssi $c_- > t(x)$ ou $t(x) > c_+$,

les diverses constantes étant déterminées par les **conditions de niveau** :

(11) $E_{\theta-}\, \varphi(X) = \alpha$ et $E_{\theta+}\, \varphi(X) = \alpha$.

Cependant, on a alors :

(12) $E_\theta\, \varphi(X) \geq \alpha, \quad \forall\, \theta \in [\theta_-, \theta_+]$.

(iv) Ce théorème est ainsi au centre de la théorie des tests. Dans cette théorie, mise en oeuvre dans des **contextes** très divers, on privilégie les tests de niveaux inférieurs à α et l'on recherche ceux (ou celui) d'entre eux qui sont de **puissance** maximum (cf **puissance d'un test**).