THÉORÈME DE POINCARÉ (B1, B4)
(04 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

On appelle souvent **théorème de POINCARÉ** une propriété qui généralise l'**axiome des probabilités totales**, ie l'axiome d'**additivité** simple ou celui de sigma-additivité des **mesures de probabilité** (cf **équation de POINCARÉ**, **formule de POINCARÉ**).

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $(A_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une **suite** quelconque d'éléments (ou **événements aléatoires** « complexes ») de $\mathcal{T}$.

Le **théorème de H.J. POINCARÉ** réside dans l'égalité suivante :

(1) $P(\cup_{n=1}^{N} A_n) = \Sigma_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} T_n, \quad \forall N \in \mathbf{N}^*,$

expression dans laquelle :

(2) $T_n = \Sigma_{I(n) \in \mathcal{T}(n)} P(\cap_{\alpha=1}^{n} A_{i(\alpha)}),$

où I(n) désigne la suite $I_n = (i_1, ..., i_n) \in \mathcal{T}_n = (\mathbf{N}^*)_<^n = \{(i_1, ..., i_n) \in (\mathbf{N}^*)^n : i_1 < ... < i_n\}$, et où $\mathcal{T}_n$ est aussi écrit (par commodité) $\mathcal{T}(n)$.

(ii) Lorsque la suite se réduit à deux éléments $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{T}$, on obtient la forme simplifiée usuelle du théorème (cf **théorème des probabilités totales**) :

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$