THÉORÈME DE SLUTZKY (A4, E, N3)

(15 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Deux propriétés sont connues sous le nom de **théorème de SLUTZKY** : l'une concerne la convergence d'une **suite** de **variables aléatoires**, l'autre la transformation d'une **série temporelle**.

(i) Premier théorème de E.E. SLUTZKY

Ce théorème possède une forme faible et une forme forte :

(a) **forme faible**. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé** et $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ un **espace topologique**, qui est un **espace mesurable** avec sa **tribu borélienne** $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$, et $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** de **variables aléatoires** $X_n : \Omega \mapsto \mathcal{X}$, ie une suite d'applications $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ -mesurables, non nécessairement indépendantes entre elles. En pratique, on a souvent $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$.

Soit, d'autre part, $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbf{R}^L$ ($L \geq 1$) une fonction continue, ie tq $f^{-1}(R) \in \mathcal{B}$, $\forall R \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^L)$ (ouverts de $\mathbf{R}^L$) (cf **application continue**).

Alors, si X tend (en probabilité) vers une **va** (éventuellement dégénérée) X_∞ (cf **convergence en probabilité**), la suite Y constituée des variables aléatoires Y_n définies selon :

$$(1) \quad Y_n = f(X_n), \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

tend aussi en probabilité vers la variable aléatoire Y_∞ définie par :

$$(2) \quad Y_\infty = f(X_\infty).$$

Autrement dit :

$$(3) \quad X_n \xrightarrow{P} X_\infty \Rightarrow Y_n = f(X_n) \xrightarrow{P} f(X_\infty) = Y_\infty,$$

ie la convergence en probabilité se conserve par transformation continue d'une suite de **va**.

Cette version faible du théorème s'écrit souvent :

$$(3)' \quad P\text{-}\lim_n f(X_n) = f(X_\infty) \quad \text{ou simplement} \quad \text{plim } f(X_n) = f(X_\infty).$$

(b) **forme forte**. Dans le même cadre que précédemment, on établit une propriété analogue en termes de convergence P-presque sûre (cf **convergence presque sûre**), ie :

$$(3)'' \quad X_n \xrightarrow{P\text{-p.s.}} X_\infty \Rightarrow Y_n = f(X_n) \xrightarrow{P\text{-p.s.}} f(X_\infty) = Y_\infty .$$

Autrement dit, la convergence presque sûre se conserve par transformation continue d'une suite de va.

Cette version forte s'écrit aussi :

$$\lim P\text{-p.s.} f(X_n) = f(X_\infty),$$

$$(3)''' \quad \text{pslim}_n f(X_n) = f(X_\infty),$$

$$\lim f(X_n) = f(X_\infty) \text{ (P-p.s.)}.$$

On a donc, resp :

$$(4)' \quad \text{plim} f(X_n) = f(\text{plim} X_n)$$

et :

$$(4)'' \quad \text{pslim} f(X_n) = f(\text{pslim} X_n).$$

Si f n'est pas définie en certains points x_i ($i \in I$) de $\mathcal{X}$ (eg si $f(x_i) \in \bar{\mathbf{R}}^L \setminus \mathbf{R}^L$ au point $x_i \in \mathcal{X}$), le théorème faible vaut encore si $P([X_\infty(\omega) = x_i]) = 0$.

(ii) **Second théorème de E.E. SLUTSKY**

Ce théorème concerne une propriété qui peut s'observer lorsqu'on transforme un **processus** ou une **série temporelle** par **filtrage** (eg **moyenne mobile**).

Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique réel scalaire (ie $\mathcal{X} = \mathbf{R}$) en **temps** discret (ie $T = \mathbf{Z}$). Les entiers $m \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$ étant donnés, on définit le **processus de moyenne mobile** élémentaire suivant :

$$(5) \quad \begin{aligned} \Sigma X_t &= X_t + X_{t+1}, \\ Y_t &= \Sigma^m X_t = \Sigma(\Sigma^{m-1} X_t), \end{aligned}$$

puis le processus :

$$(5) \quad Z_t = \Delta^n Y_t \quad (\text{différence finie d'ordre } n).$$

Le **théorème de E.E. SLUTSKY**, parfois appelé **théorème de la limite sinusoïdale**, est alors le suivant. Si $\lim (m/n) = \alpha \in]0, 1[$ lorsque $\min(m, n) \rightarrow +\infty$, le processus $Z = (Z_t)_{t \in T}$ tend vers un **processus harmonique** particulier, de type sinusoïdal, dont la fréquence ω_∞ est donnée par :

$$(7) \quad \omega_{\infty} = \text{Arc cos} \{(1 - \alpha) / (1 + \alpha)\}.$$

Ce résultat, qui a été généralisé, montre que l'on peut introduire des **périodicités fictives** (ou des **cycles fictifs**) lorsqu'on transforme (eg par moyenne mobile ou par **lissage**) une série temporelle ou un processus.

Cette procédure conduit à une « anomalie » appelée « **effet SLUTZKY** », ou encore **effet de E.E. SLUTZKY - G.U. YULE**.