THÉORÈME DE SMIRNOV (E, I2)
(08 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Le nom **théorème de SMIRNOV** est souvent donné à une propriété qui fonde le **test de KOLMOGOROV-SMIRNOV** comme test d'**homogénéité** entre deux **populations** (supposées distribuées selon une même **loi de probabilité**). Le cadre général est celui du **problème à plusieurs échantillons**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $X^i = (X_{i1}, ..., X_{iN(i)})$ $(i = 1, 2)$ deux **échantillons aléatoires** indépendants entre eux, chacun étant supposé généré par la loi $P^{\xi(i)}$ d'une **vars** $\xi_i : \Omega \mapsto \mathbf{R}$. On note F_i la **fonction de répartition** de la population n° i d'où est tiré X^i et l'on suppose que $P^{\xi(i)}$ est une **loi absolument continue** pr à la **mesure de LEBESGUE** λ.

On définit les deux **statistiques de N.V. SMIRNOV** suivantes :

$$D_{N(1)N(2)}^{+} = \sup_{x \in \mathbf{R}} \{F_{N(1)}(x) - F_{N(2)}(x)\},$$
(1)
$$D_{N(1)N(2)} = \sup_{x \in \mathbf{R}} |F_{N(1)}(x) - F_{N(2)}(x)|.$$

Le **théorème de N.V. SMIRNOV** se traduit alors par les deux propriétés suivantes :

$$\lim_{N^* \to +\infty} P([R_{12} \,.\, D_{N(1)N(2)}^{+} \leq x]) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}+}(x) \,.\, \{1 - \exp(-2x^2)\},$$
(2)
$$\lim_{N^* \to +\infty} P([R_{12} \,.\, D_{N(1)N(2)} \leq x]) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}+}(x) \,.\, \Sigma_{z \in \mathbf{Z}}\ f(x, z),$$

où $N^* = \min(N_1, N_2)$, $R_{12} = (N_1 + N_2)^{-1/2} \,.\, (N_1 \,.\, N_2)^{1/2}$, N(i) désigne par commodité N_i $(i = 1, 2)$, $\mathbf{1}_A$ désigne la **fonction indicatrice** d'une **partie** A et $f(x, z) = (-1)^z \exp(-2 \,.\, z^2 x^2)$.