THÉORÈME DE TULCÉA (D1, D5, N)
(25 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Le **théorème de C.T.I. TULCÉA** permet d'étendre le **théorème de FUBINI** généralisé au cas d'un produit dénombrable d'espaces (ou d'épreuves aléatoires) (cf **produit d'espaces mesurables**, **produit d'espaces mesurés**).

Ce théorème est souvent utilisé en **théorie des processus**.

(i) Soit $((\Omega_n , \mathcal{T}_n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ une **suite** d'**espaces probabilisables** $(\Omega_n , \mathcal{T}_n)$. On note l'espace produit (dénombrable) $(\Omega, \mathcal{T})$ correspondant, avec $\Omega = \prod_{n \in \mathbf{N}^*} \Omega_n$ et $\mathcal{T} = \otimes_{n \in \mathbf{N}^*} \mathcal{T}_n$ (tribu produit).

Soit P_1 une probabilité définie sur $\mathcal{T}_1$, P_{12} une **probabilité de transition** définie sur $\Omega_1 \times \mathcal{T}_2$,..., et, $\forall$ n $\in \mathbf{N}^*$, $P_{1,...,n,n+1}$ une probabilité de transition définie sur $(\Omega_1 \times ... \times \Omega_n) \times \mathcal{T}_{n+1}$.

Le **théorème de C.T.I. TULCÉA** affirme alors qu'il existe une **mesure de probabilité** P définie sur $\mathcal{T}$ et tq :

(1) $\quad P(A) = \int_{A(1)} P_1 (d\omega_1) \int_{A(2)} P_{12} (\omega_1 , d\omega_2) ... \int_{A(n)} P_{1,...,n-1,n} (\omega_1 ,... \omega_{n-1} , d\omega_n)$,

pour toute partie $A \in \mathcal{A}$ de la forme $A = \prod_{n \in \mathbf{N}^*} A_n$ tq il existe un ensemble d'**indices** I fini tq $A_i = \Omega_i$, $\forall$ i $\in$ **N** \ I, où l'on suppose que $A_i = \Omega_i$ dès que $i > n$ et où A(i) désigne A_i , $\forall$ i $\in$ {1 ,..., n}.

(ii) Ce théorème consiste donc à définir une (mesure de) probabilité produit à l'aide de (mesures de) probabilité (s) de transition successives : dans (1), les intégrations s'effectuent de droite à gauche.