THÉORÈME DE WOLD (N2)
(24 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **théorème de WOLD** est un théorème de décomposition important de la **théorie des processus** : il exprime la propriété selon laquelle certains **processus** peuvent se représenter comme la somme de deux processus aux propriétés particulières.

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathbf{C}, \mathcal{B}_{\mathbf{C}}), (X_t)_{t \in T}\}$ un processus complexe scalaire en **temps** discret (ie $T = \mathbf{N}$). On suppose que X est un **processus stationnaire en covariance**.

Le **théorème de H. WOLD** énonce alors que X peut se décomposer sous la forme :

(1) $\quad X = M + U,$

dans laquelle :

(a) $M = (M_t)_{t \in T}$ est un **processus déterministe** (ou processus non régulier), souvent appelé **composante non régulière**, ou **composante singulière**, de X ;

(b) $U = (U_t)_{t \in T}$ est un **processus régulier** (ie non déterministe) tq il existe un processus unique $V = (V_t)_{t \in T}$ et une suite $c = (c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$(b)_1$ U admet une **représentation moyenne mobile** de la forme :

(2) $\quad U_t = \Sigma_{n \in \mathbf{N}} \; c_n V_{t-n} = C(L) V_t ,$

où $C(L) = \Sigma_{n \in \mathbf{N}} \; c_n L^n$, et où L est l'**opérateur retard** ($L V_t = V_{t-1}$, $\forall t \in T$) ;

$(b)_2$ on a $c_0 > 0$ et $\Sigma_{n \in \mathbf{N}} \; |c_n|^2 < +\infty$;

$(b)_3$ V est un **bruit blanc** particulier tq $E V_s \bar{V}_t = \delta_{st}$, pour tout $(s, t) \in T^2$, et, pour tout $t \in T$, V_t appartient à la variété linéaire $\mathcal{V}_t$ de $L_{\mathbf{C}}^2 (\Omega, \mathcal{T}, P)$ engendrée par la suite $(X_s)_{s \leq t}$.

De plus, on a :

(3) $\quad E M_s \bar{V}_t = 0 \qquad$ et $\qquad M_t \in \cap_{t \in T} \mathcal{V}_t , \qquad \forall (s, t) \in T^2.$

On montre que la **fonction de répartition spectrale** de M est la composante singulière de la fr spectrale de X, et que celle de U est la composante absolument continue de la fr spectrale de X.

(ii) Le **théorème de WOLD** précédent s'étend au cas d'un **processus vectoriel** complexe. Ainsi, si $X = \{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathbf{C}^K, \mathcal{B}(\mathbf{C}^K), (X_t)_{t \in T}\}$ est un tel processus, supposé en temps discret ($T = \mathbf{Z}$), on peut, sous des hypothèses adaptées, le décomposer sous la **forme de E.J. HANNAN** :

(1)' $X_t = C(L)\, V_t$, $\forall\, t \in T$,

dans laquelle $C(L) \in M_K(\mathbf{C})$ est une fonction matricielle de l'**opérateur retard** L, avec $c_{kl} = \Sigma_{n \in \mathbf{N}}\, c_{kl}(n)\, L^n$ et $V = (V_t)_{t \in T}$ est un bruit blanc complexe vectoriel, ie :

(4) $E\, V_t = 0$ et $E\, V_s\, V_t^* = \delta_{st} \,.\, \sigma_V^2 \,.\, I_K$, $\forall\, (s, t) \in T^2$,

où $z^* = \bar{z}\,'$ désigne le vecteur transconjugué (ou vecteur adjoint) de $z \in \mathbf{C}^K$.