THÉORÈME DE LA FONCTION IMPLICITE (A4)

(04 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **théorème de la fonction implicite** est un des grands théorèmes d'existence de l'analyse mathématique. Il intervient donc, comme outils technique, dans diverses questions de **Statistique** : **modèle d'interdépendance**, **modèle non linéaire**, etc.

(i) Soit E , F et G trois **espaces de BANACH** sur le corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$), $U \subset E \times F$ une **partie ouverte**, $f : U \rightarrow G$ une application continûment différentiable (ie de **classe** C^1 sur U) et $(a, b) \in E \times F$ un point tq :

$$(a) f(a, b) = 0 ;$$

(b) $D_2 f(a, b) = (\partial f / \partial y)(a, b)$ est un isomorphisme sur G , ie $D_2 f(a, b) \in \text{Isom}(F, G)$ (cf **homomorphisme**).

Le **théorème de la fonction implicite** affirme alors qu'il existe un **voisinage** ouvert $\mathcal{V}_{(a,b)}$ de (a, b) contenu dans U et un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a tq, pour tout $x \in \mathcal{V}_a$, **l'équation implicite** :

$$(1) f(x, y) = 0$$

admet une solution unique $y = \varphi(x)$ tq $(x, \varphi(x)) \in \mathcal{V}_{(a,b)}$.

De plus, l'application $\varphi : \mathcal{V}_a \rightarrow F$ définie par $x \mapsto y = \varphi(x)$ est de classe C^1 et on l'appelle **fonction implicite**. On écrit parfois $y = \varphi(x)$ pour exprimer que $f(x, \varphi(x)) = 0$.

(ii) D'après le théorème précédent, on a donc, par définition :

$$(a) \varphi(a) = b ;$$

$$(b) (x, \varphi(x)) \in U, \forall x \in \mathcal{V}_a ;$$

$$(c) f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in \mathcal{V}_a .$$

Comme φ est de classe C^1 , sa dérivée $D\varphi$ se calcule selon :

$$(2) D\varphi(x) = -\{D_2 f(x, \varphi(x))\}^{-1} \circ D_1 f(x, \varphi(x)), \quad \forall x \in \mathcal{V}_a .$$

(iii) Lorsque E et F sont des espaces produits, on parle aussi du **théorème des fonctions implicites**. En effet, dans le cas élémentaire où $E = \mathbf{R}^n$ et $F = \mathbf{R}^m$, l'équation (1) s'écrit alors sous la forme :