THÉORÈME DES PROBABILITES TOTALES (A5, B1)
(30 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **théorème des probabilités totales** constitue une autre forme de l'axiome d'**additivité** simple (resp de sigma-additivité) des mesures (cf aussi **additivité des fonctions d'ensemble**). Cet axiome s'applique à toute **mesure de probabilité** P définie sur une **tribu** $\mathcal{T}$ de **parties** d'un **ensemble** fondamental Ω donné.

On considère donc un **espace fondamental** (probabilisé) (Ω, $\mathcal{T}$, P) et une **suite** quelconque d'**événements** $A = (A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de Ω. Cette suite A est disjointe ssi ie $A_\beta \cap A_\alpha = \varnothing$, $\forall\ \beta \neq \alpha$ (cf **famille de parties disjointe**).

(i) Le **théorème des probabilités totales** s'exprime :

(a) soit par la **formule d'additivité simple** (cas d'une suite A disjointe) :

(1) $P\,(\cup_{n=0}^{N} A_n) = \Sigma_{n=0}^{N} P\,(A_n)$,

ou encore (cas d'une suite A non nécessairement disjointe) :

(1) $A_\beta \cap A_\alpha = \varnothing\ (\forall\ (\alpha, \beta) \in (N_N{}^*)^2 \text{ tq } \beta \neq \alpha) \Rightarrow P\,(\cup_{n=0}^{N} A_n) = \Sigma_{n=0}^{N} P\,(A_n)$;

(b) soit selon la **formule de sigma-additivité** (ou σ-additivité) (cas d'une suite A disjointe) :

(2) $P\,(\cup_{n \in \mathbf{N}} A_n) = \Sigma_{n \in \mathbf{N}} P\,(A_n)$,

ou encore (cas d'une suite A non nécessairement disjointe) :

(2) $A_\beta \cap A_\alpha = \varnothing\ (\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2 \text{ tq } \beta \neq \alpha) \Rightarrow P\,(\cup_{n \in \mathbf{N}} A_n) = \Sigma_{n \in \mathbf{N}} P\,(A_n)$.

(ii) L'origine de cette propriété est concrète : la **fréquence** d'apparition d'un **événement aléatoire** $A \in \mathcal{T}$ et celle d'un **événement (totalement) différent** B s'additionnent. Il en va donc de même lorsque ces fréquences convergent vers leurs probabilités limites respectives.