THÉORÈME DU POINT FIXE (A4)
(27 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **théorème du point fixe** indique sous quelles hypothèses il existe un point qui n'est pas « déplacé » par une **application**, ie un **point invariant** par cette application. Il en existe plusieurs versions, dont les trois suivantes.

(i) **Théorème du point fixe de E. PICARD**.

Soit (E, d) un **espace métrique** complet (cf **espace complet**) et $f : E \mapsto E$ une **application contractante**. Il existe alors un point unique $x^{\sim} \in E$ tq :

(1) $f(x^{\sim}) = x^{\sim}$.

Ce point est appelé **point fixe** , ou **« point invariant »**, de f.

De plus, pour tout point $x \in E$, la relation de récurrence suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = f(x_0) \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \end{cases}$$

appelée **algorithme des approximations successives**, définit une suite $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de E qui converge vers le point fixe $x^{\sim}$ précédent.

(ii) **Théorème du point fixe de L.E.J. BROUWER**.

On pose $E = \mathbf{R}^n$. Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ une **partie compacte** et convexe (cf **partie convexe**) et $f : K \mapsto K$ une **application continue**. Alors f possède un point fixe $x^{\sim}$, ie un point vérifiant (1).

(iii) **Théorème du point fixe de L.E.J. BROUWER - S. KAKUTANI** (généralisation du précédent).

On considère une partie compacte et convexe K de $E = \mathbf{R}^n$ ainsi qu'une **correspondance** semi-continue supérieurement $\Gamma : K \mapsto \mathscr{P}(K)$ tq, pour tout $x \in K$, $\Gamma(x)$ est une partie convexe de K (cf **semi-continuité**).

Alors Γ admet un point fixe $x^{\sim} \in K$, ie :

(1)' $\Gamma(x^{\sim}) = \{x^{\sim}\}$.