THÉORÈME ERGODIQUE MAXIMAL (A4, A5, N)
(21 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un résultat important de la **théorie ergodique** est le **théorème ergodique**, dont il existe plusieurs versions.

(i) On considère :

(a) un **espace topologique** métrisable, séparable et localement compact (cf **espace métrisable**, **espace séparable**, **espace localement compact**) ;

(b) une **mesure positive** μ sur E, ie un élément du dual de l'**espace de BANACH** $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}$ (E) constitué des fonctions réelles continues dans E, élément tq $f \geq 0 \Rightarrow \mu(f) \geq 0$ (cf **fonction numérique**, **mesure de RADON**) ;

(c) une **application propre** $\varphi : E \mapsto E$, ie une application tq, pour toute **partie compacte** $K \subset E$, l'image inverse $\varphi^{-1}(K)$ est compacte dans E (cf **image d'une application**). On suppose que φ est une **application continue** et que μ est invariante par φ, ie :

(1) $$\mu^{\varphi} = \varphi(\mu) = \mu ;$$

(d) une fonction μ-intégrable $f : E \mapsto \mathbf{R}$ (cf **fonction intégrable**).

On pose alors ;

(2) $$f_0 = f, \qquad f_n = f \circ \varphi^n \text{ ou } f(\varphi^n), \qquad \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

et l'on définit l'ensemble :

(3) $$E_n = \{x \in E : \exists p \in N_n \text{ tq } \Sigma_{i=0}^{p-1} f_i(x) \geq 0\}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Le **théorème ergodique maximal** en conclut alors que :

(a) E_n est une **partie mesurable**, pour tout $n \in \mathbf{N}$;

(b) $\int \mathbf{1}(E_n) . f \, d\mu \geq 0, \forall n \in \mathbf{N}$;

(c) $\int \mathbf{1}(E_\infty) . f \, d\mu \geq 0, \forall n \in \mathbf{N}$, avec $E_\infty = \cup_{n \in \mathbf{N}} E_n$.

(ii) Une **version probabiliste** du théorème précédent suppose que E est un **ensemble** fondamental Ω (cf **espace fondamental**) et que μ est une **mesure de probabilité** P définie sur une **tribu de parties** $\mathcal{T}$ de Ω. Etant donné $\lambda \in \mathbf{R}$, on pose :

(4) $N_\lambda = \{x \in E : \sup_p (1 / p) \Sigma_{i=0}^{p-1} f (\varphi^i (x)) > \lambda\}$.

Alors, f étant toujours supposée P-intégrable, on montre que :

(5) $\lambda \,.\, P (N_\lambda) \leq \int (\mathbf{1}(N_\lambda) \,.\, f)\, dP$.