THÉORÈME FONDAMENTAL DE NORMALITE ASYMPTOTIQUE (C7, E, N)
(28 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de **vecteurs aléatoires** $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$, $(\mu, \Sigma) \in \mathbf{R}^K \times S_K (\mathbf{R})$, et $\varphi : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{R}_+^*$ une **application** strictement positive.

On suppose que :

$$\lim_n \varphi (n) = +\infty, \qquad \text{(convergence simple)},$$
(1)
$$\varphi (n) (X_n - \mu) \to^{\mathcal{L}}{}_{n \to +\infty} \mathcal{N}_K (0, \Sigma), \qquad \text{(convergence en loi)},$$

où $\mathcal{N}_K (0, \Sigma)$ désigne la **loi normale multidimensionnelle** centrée.

Le **théorème fondamental de normalité asymptotique** exprime alors que :

(a) si $g : \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{R}$ est une **fonction borélienne** (ie une **application mesurable** pr aux **tribus boréliennes** de $\mathbf{R}^K$ et $\mathbf{R}$) et qu'elle est différentiable (cf **différentiabilité**), on a :

(2) $$\varphi (n) . \{g (X_n) - g (\mu)\} \to^{\mathcal{L}}{}_{n \to +\infty} \mathcal{N}_1 (0, S),$$

où $S = (D\, g (\mu))' \Sigma (D\, g (\mu))$, et $D\, g (\mu) \in \mathbf{R}^K$ est le **gradient** de g évalué au point $\mu \in \mathbf{R}^K$, ie $D\, g (\mu) = \Sigma_{k=1}^K D_k\, g (\mu) . e_k$, où les e_k ($k = 1$,..., K) sont les vecteurs de la **base canonique** de $\mathbf{R}^K$;

(b) si $g : \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{R}^L$ est une fonction borélienne différentiable, on a :

(3) $$\varphi (n) . \{g (X_n) - g (\mu)\} \to^{\mathcal{L}}{}_{n \to +\infty} \mathcal{N}_L (0, S),$$

où $\Sigma = (J_g (\mu)) \Sigma (J_g (\mu))'$ et $J_g (\mu) \in M_{LK} (\mathbf{R})$ est la **matrice jacobienne** de g au point μ, dont les éléments sont $J_{lk} (\mu) = (\partial g_l / \partial \mu_k)(\mu)$, où $(l, k) \in \{1 ,..., L\} \times \{1 ,..., K\}$.

(ii) Ce théorème joue un rôle important dans l'étude des **suites** de **va** ou des **processus** (cf aussi **normalité asymptotique**). Il explique aussi le rôle joué par la **normalité asymptotique** dans les applications (cf aussi **théorème de la limite centrale**, **loi des grands nombres**).