

THÉORIE DE L'ESTIMATION (H)

(05 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **théorie de l'estimation** est un exemple important d'application de la **théorie de la décision** statistique. Son objet consiste à déterminer, au sein d'une famille de **lois de probabilité**, la **loi** qui gouverne (ou régit, ou encore génère) un **phénomène** donné, notamment à travers ses manifestations apparentes, utilisables pour l'investigation statistique : ie les **observations** relatives à ce phénomène.

(i) La théorie postule l'existence d'un **modèle statistique fondamental** $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$, encore appelé **modèle de base**, **modèle initial** ou encore **modèle sous-jacent**, dans lequel $\mathcal{P}$ est une **famille** de **mesures de probabilité** définies sur $\mathcal{T}$. Cette famille est, en général, une **partie** seulement de l'ensemble de toutes les probabilités définies sur $\mathcal{T}$.

Par suite, étant donné un **ensemble d'observation(s)** $\mathcal{X}$, ou un **ensemble de mesure(s)** $\mathcal{X}$, muni d'une **tribu de parties** $\mathcal{B}$, on définit un **espace d'observation** $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. On observe une **application mesurable (échantillon)** $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ qui associe à chaque $\omega \in \Omega$ une grandeur $x = X(\omega) \in \mathcal{X}$. Par suite, X permet de définir un autre modèle statistique $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P}^X)$, appelé **modèle image**, **modèle induit** ou **modèle final**, qui est l'image du modèle fondamental par X , modèle dans lequel la famille $\mathcal{P}^X$ est constituée des **lois de probabilité** P^X , images des **mesures de probabilité** $P \in \mathcal{P}$ par X : ie $P^X = X(P)$.

Le plus souvent, on « oublie » le **modèle de départ** pour n'étudier que le **modèle d'arrivée** ainsi défini.

Pour déterminer la loi (ou la **famille** de lois) qui a généré X , on ne dispose généralement que du modèle image et de X . Si, par une méthode d'**estimation** donnée, on peut déterminer une partie $\mathcal{P}_0^X \subset \mathcal{P}^X$ dont une des lois a généré X , on dit que le modèle est estimé à l'aide d'une **méthode d'estimation ensembliste** (cf **estimateur ensembliste**). Si $\text{card } \mathcal{P}_0^X = 1$, on parle de **méthode d'estimation ponctuelle** (cf **estimateur ponctuel**).

(ii) En pratique, le plus souvent, on ne s'intéresse qu'à une **caractéristique légale**, qui peut être de nature **ponctuelle** (eg **moment**, **mode**, **quantile**) ou **fonctionnelle** (**fonction de répartition**, **fonction caractéristique**). On peut aussi considérer une **suite** finie de caractéristiques légales, ie celles des lois P^X éléments de $\mathcal{P}^X$. Si Γ est l'ensemble des valeurs de ces caractéristiques, ou « **ensemble caractéristique** » associé à $\mathcal{P}^X$, si Γ est doté d'une **tribu** $\mathcal{B}_\Gamma$ et si $c : \mathcal{P}^X \mapsto \Gamma$ est une « **application caractéristique** », qui associe à chaque loi $P^X \in \mathcal{P}^X$ le vecteur $\gamma = c(P^X)$ des caractéristiques considérées, le problème de l'estimation consiste à attribuer une valeur, ou un ensemble de valeurs, vraisemblable(s) à γ .

Si γ est estimé par un élément $\gamma^* \in \Gamma$, la fonction $c^* : \mathcal{X} \mapsto \Gamma$ définie par $c^*(X) = \gamma^*$ est appelé **estimateur ponctuel** de γ .

De même, si γ est estimé par une partie $\Delta^* \in \mathcal{B}_\Gamma$, l'application $C^* : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{P}(\Gamma)$ définie par $C^*(X) = \Delta^*$ est appelée **estimateur ensembliste** de γ .

Lorsque $\mathcal{P}^X$ est une famille paramétrée tq $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ et que l'on se réfère au cadre de la **théorie de la décision** statistique, l'**estimation ponctuelle** revient à mettre l'ensemble des décisions D en bijection avec l'ensemble des valeurs Θ du paramètre θ (on assimile d'ailleurs souvent D et Θ) : le choix d'une décision $d^* \in D$ équivaut donc au choix d'une valeur $\theta^* \in \Theta$ du paramètre, ie à décider de la loi $P_{\theta^*}^X$ correspondante, ce qui suppose que $\mathcal{P}^X$ est une **famille de lois identifiable**.

De façon analogue, l'**estimation ensembliste** revient à mettre D en bijection avec l'ensemble des parties mesurables de Θ , ie avec $\mathcal{B}_\Theta$, et le choix d'une décision $d^* \in D$ équivaut au choix d'une partie $S^* \in \mathcal{B}_\Theta$, donc à décider d'une famille $(P_\theta^X)_{\theta \in S^*}$ de lois régissant les observations $x = X(\omega)$.

(iii) Les principaux concepts de la théorie de l'estimation sont notamment ceux de **représentation statistique**, de **règle de décision** (appelée **estimateur**), de **fonction de perte** et de **fonction de risque**, ainsi que celui de **préordre** sur l'ensemble des fonctions de décision (estimateurs) considéré(e)s.

Si X est un échantillon de taille N de la forme $(X_1, \dots, X_N)$, la théorie distingue aussi entre :

(a) **estimation statique**. Dans ce cas, la taille N est donnée, imposée ou fixée a priori (eg pour des considérations de coût) (cf **fonction de coût**) ;

(b) **estimation séquentielle**. Dans ce cas, on peut procéder à un **échantillonnage** progressif :

(b)₁ en effectuant des **mesures** (observations) sur des **unités statistiques** supplémentaires ($X_{N+1}, \dots, X_{N+H}$) ;

(b)₂ et en arrêtant cet échantillonnage dès que certaines conditions - fixées a priori - sont vérifiées : eg lorsque le dernier estimateur calculé a atteint une **précision** donnée.