

THÉORIE DES CATASTROPHES (A7, N10)

(10 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **théorie des catastrophes** a pour objet la représentation de phénomènes qui changent brusquement de « comportement » en raison (supposée) de variations, légères ou continues, subies par (ou imprimées à) certains **facteurs**. Ces facteurs peuvent être **observables** ou « maîtrisables » (facteurs « contrôlés ») ; mais ils sont, en général, **inobservables** : on les appelle parfois des **variables cachées**, ou (improprement) des **paramètres cachés**.

(i) Dans la mesure où un **phénomène** peut être décrit par un **système aléatoire** (dynamique), une **catastrophe** se caractérise par la présence de deux éléments :

(a) le **changement de « comportement »** du phénomène observé, ou « rupture » dans l'évolution du système aléatoire qui lui est associé (cf **niveau, répartition, évolution**) ;

(b) l'« **influence** » d'une **variable**, ou de plusieurs variables, (inobservable(s)) sur le phénomène, d'où résulte le changement d'évolution précédent.

Elle peut aussi se référer à un **changement d'états** dont les premiers, antérieurs, sont considérés comme « normaux », et les seconds, postérieurs, comme « anormaux ». Dans ce contexte, la rupture en question peut être associée à une notion d'**utilité** individuelle : perte de satisfaction brutale.

Un « **effet de surprise** » est donc souvent attribué à une catastrophe, même si des situations analogues sont déjà connues : ie réalisées soit dans le passé, soit en d'autres lieux.

(ii) Il existe de nombreuses situations concrètes dans lesquelles une variation (parfois « infime ») de certaines variables, connues ou inconnues, contribuant à un phénomène, entraîne une variation (généralement « radicale ») dans le comportement ou l'évolution du phénomène. Ainsi, sont souvent considéré(e)s comme catastrophes :

(a) en physique (eg géologie, météorologie) : un séisme, une éruption volcanique, un raz de marée ou un tsunami, une avalanche ou un cyclone ;

(b) en biologie : une mutation génétique (contrôlée en laboratoire ou même consécutive à une autre catastrophe : eg radiations ou rayonnements), une épidémie, une carcinogénèse et ses facteurs déclenchants ;

(c) en écologie : une épizootie (pour une faune), une émission massive de produits toxiques ou pathogènes (pétrole, radioactivité, GES) ;

(d) en psychologie : une épisode nerveux (épilepsie, etc), une euphorie, une dépression, certaines variations bipolaires, une sociopathie ;

(e) en sociologie : un basculement important de l'équilibre politique (eg « coup d'Etat »), une « révolution » sociale (grève massive), une « crise » économique ou financière (« crash », éclatement d'une bulle spéculative).

(iii) Ces exemples montrent que l'on peut décrire une catastrophe en tenant compte aussi de deux éléments :

(a) d'une part, l'**échelle d'observation** du phénomène considéré : selon les situations, cette échelle peut être de nature microscopique, mésoscopique ou macroscopique ;

(b) d'autre part, l'**ampleur de l'écart** entre la situation de nouvel équilibre existant après la catastrophe et la situation d'équilibre « précaire » (apparent) qui lui était antérieure.

Ainsi, les particularités suivantes sont essentielles pour caractériser une catastrophe :

(a) la **nature de la catastrophe**. Elle dépend du **domaine de connaissance** considéré, ainsi que du phénomène analysé ;

(b) le **lieu de la catastrophe** (espace), et son étendue ;

(c) la **date de la catastrophe** (temps). C'est l'instant (ou la période de temps) auquel (à laquelle) se produit la catastrophe : date de début, date de fin ou durée du phénomène ;

(d) l'**ampleur de la catastrophe**, d'où sont induits des coûts de nature diverse : écologique, psychologique, sociale (économique, financier ou assurantiel).

La **prévision** des trois derniers éléments est souvent un enjeu crucial pour le **statisticien** ou l'**homme de l'art**.

Dans l'étude d'une catastrophe, ou lorsqu'il existe des raisons d'en anticiper une, le statisticien peut mettre en oeuvre diverses procédures d'**inférence statistique** : la **nature** de la catastrophe étant définie, **estimation**, **tests** ou **prévision** peuvent porter soit sur le **lieu** où peut se réaliser une catastrophe (processus spatio-temporel), soit sur la **date** ou la **durée** d'une catastrophe (processus temporel), soit sur l'**amplitude** de celle-ci (ou de ses conséquences : coûts socio-économiques, notamment).

Se pose alors, pour l'homme de l'art, ou la classe politique, des problèmes spécifiques d'**anticipation**, ou de **prévention**, ou d'**évaluation des coûts** potentiels.

(iv) La théorie (mathématique) des catastrophes (R. THOM, E.C. ZEEMAN) est fondée sur diverses théories (théorie des **variétés différentielles** et géométrie différentielle, etc), dont la **théorie des singularités**. Cette dernière étudie notamment les propriétés d'un **système** (différentiel) non linéaire. Dans cette approche, de nature déterministe, le système est représenté par une **équation différentielle** (cf aussi **contrôle optimal**) de la forme :

$$(1) \quad y' = dy / dt = f(x, y),$$

où $y \in \mathcal{Y}$ s'interprète eg comme une **variable d'état** ou une **variable de contrôle** et $x \in \mathcal{X}$ comme une **variable « cause »**, ou **facteur caché** (y compris, éventuellement, le « temps » physique t , ou temps continu).

On appelle alors **point critique** (ou **valeur critique**), ou encore **point singulier** (ou **valeur singulière**), de l'équation (1) tout couple $(x_0, y_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ qui annule la **dérivée** (notion supposée définie) de f par rapport à x .

Une équation tq (1) peut, en pratique, posséder plusieurs points critiques : eg cas de l'équation $y' = x + 2y - y^3$, avec $\mathcal{Y} = \mathcal{X} = \mathbf{R}$.

Si f est développable en série de TAYLOR dans un voisinage $\mathcal{V}_0$ de (x_0, y_0) , l'**analyse locale** de (1) se fait usuellement à l'aide d'une approximation correspondante : eg une **approximation** au second ordre peut s'écrire $y' = f(x_0, y_0) + D_2 f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + (1/2) D_2^2 f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 + r_3$.

Lorsque $\mathcal{Y} = \mathcal{X} = \mathbf{R}$, on peut aussi définir une approximation $f \sim$ de f de la forme :

$$(2) \quad f \sim (x, y) = \sum_{j=0}^p \varphi_j(x) y^j, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{V}_0 \text{ (forme polynômiale en } y),$$

ce qui conduit à p points critiques possibles (au plus). En notant $(x_{0,j}, y_{0,j})_{j=1,\dots,p}$ ces points, on peut écrire :

$$(3) \quad y_{0,j} = \Phi_j(x_{0,j}), \quad \forall (x_{0,j}, y_{0,j}) \in \mathcal{V}_{0,j} \text{ et } \forall j = 1, \dots, p.$$

(v) En **Statistique**, l'approche adoptée est naturellement de nature **stochastique**.

(a) **mélange de lois**. Dans la situation la plus élémentaire, la **loi de probabilité** gouvernant un **processus stochastique** $X = (X_t)_{t \in T}$ est un mélange de deux lois, l'une (dotée d'un poids $\alpha \gg 0$) censée générer le processus de façon « normale », l'autre, « perturbatrice », (dotée d'un poids $1 - \alpha \ll 1$) censée imprimer au processus précédent des « **écarts** » d'évolution exceptionnels (cf aussi **aberration**). Le poids $\alpha \in [0, 1]$ peut évoluer au cours du temps (d'où un « processus parallèle » $(\alpha_t)_{t \in T}$), sous l'influence de facteurs (non nécessairement observable) $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_H)$, ie $\alpha_t = \alpha_t(\zeta_t)$, $\forall t \in T$, où Z_t représente la « valeur » prise

par la « liste » ζ à l'instant t . L'**identification** de cette dernière relation importe pour la compréhension de la catastrophe.

Dans cet exemple élémentaire, l'écriture formelle de la loi du processus revient à une décomposition de la forme :

$$(4) \quad \mathcal{L}(X_t) = \alpha_t(Z_t) \cdot \mathcal{L}(S_t) + (1 - \alpha_t(Z_t)) \cdot \mathcal{L}(U_t), \quad \forall t \in T,$$

où $S = (S_t)_{t \in T}$ est le processus « pur » (cf **signal**), qui « fonctionne » en temps normal, et $U = (U_t)_{t \in T}$ est le processus perturbateur (cf **bruit**), qui « altère » sporadiquement S avec un poids variable $(1 - \alpha_t(Z_t))$.

(b) **système stochastique non linéaire** (cf **système aléatoire**). Un système non linéaire peut se représenter à l'aide d'un **processus** $Z = (Z_t)_{t \in T}$ à deux composantes, ie $Z_t = (X_t, Y_t)$, $\forall t \in T$. Ce processus suit une équation d'évolution qui n'est autre qu'une **équation différentielle stochastique**, ie une équation différentielle de la forme :

$$(4) \quad dY_t / dt = f(X_t, Y_t) + \sigma(X_t, Y_t) \cdot (dW_t / dt),$$

où l'on suppose que $T \subset \mathbf{R}$ et que $\mathcal{Y} = \mathcal{X} = \mathbf{R}$. Ici, $W = (W_t)_{t \in T}$ est un **processus de WIENER (mouvement brownien)** réel (**processus du mouvement brownien**) et dW_t / dt sont ses variations au cours du **temps**. Le carré de la fonction $\sigma : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}_+^*$ peut s'interpréter comme une **variance** associée à l'équation (4).

Dans le cas gaussien, on a ainsi :

$$(5) \quad \{\sigma(X_t, Y_t)\}^{-1} \{Y_t^\circ - f(X_t, Y_t)\} = W_t^\circ \sim \mathcal{N}_1(0, 1) \quad (\text{loi normale réduite}),$$

en notant $Y_t^\circ = dY_t / dt$ et $W_t^\circ = dW_t / dt$.

Comme précédemment, le système (4) peut posséder plusieurs solutions, ou **points critiques**, parfois appelés **points de catastrophe**. Toute solution $Z_0 = (Z_{0,t})_{t \in T}$, dans laquelle $Z_{0,t} = (X_{0,t}, Y_{0,t})$, définit une **trajectoire** particulière.

Par suite, si le processus Z est associé à un **modèle de processus** tq $Z = \{(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta}), (\mathcal{Z}, \mathcal{D}), (Z_t)_{t \in T}\}$, il est possible de procéder à l'**inférence statistique** : eg **estimation** de θ par la **méthode du maximum de vraisemblance**.

En particulier, le **paramètre d'intérêt** θ peut être représenté par une **équation fonctionnelle** de la forme suivante (analogue à (2)) :

$$(6) \quad u_t = \sum_{j=0}^p \varphi_j(X_t) Y_t^j, \quad \forall t \in T \quad (\text{« régression généralisée »}),$$

où $u = (u_t)_{t \in T}$ est une **perturbation aléatoire** et $\theta = (\varphi_j)_{j=1, \dots, p}$, les fonctions inconnues φ_j étant à estimer.

(vi) La notion de catastrophe peut encore se modéliser en considérant un **ensemble** d'états $\mathcal{Y}$ (cf **espace d'états**), un ensemble de paramètres $\mathcal{X}$ et une **fonction** $v : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mapsto \mathbf{R}$ appelée **fonction potentiel**, ou simplement **potentiel**.

On dit alors qu'il se produit une **catastrophe** en $(x_0, y_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ssi il n'existe pas d'**homotopie** entre $v(x_0, y_0)$ et $v(x_0, y)$, avec $y \neq y_0$.

Par analogie, deux **contextes statistiques** peuvent conduire à une notion de catastrophe :

(a) en théorie de la **robustesse**, une **procédure statistique non robuste** peut être qualifiée de **procédure catastrophique** ;

(b) en **théorie des processus** (cf **catastrophe dans un processus**).