THÉORIE DES JEUX (A14)

(28 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **théorie des jeux** a pour objet l'étude des comportements optimaux d'un ensemble d'entités décisionnelles possédant une certaine **autonomie de décision** : animaux aussi bien qu'êtres humains (personnes physiques). Ces entités disposent d'un **ensemble d'informations** et peuvent agir dans le champ d'un **ensemble de décisions** possibles, ceci afin d'atteindre un **objectif** que chacune d'elles se fixe : minimiser une perte, maximiser un gain, etc.

(i) Les données de base d'un **jeu** comportent donc :

(a) un **ensemble** J de **joueurs** j . Cet ensemble est en général fini, auquel cas on note $J = \{1, \dots, m\}$;

(b) un ensemble d'**informations** C_j propre à chaque joueur $j \in J$. Cet ensemble est souvent supposé fini, auquel cas on le note $C_j = \{c_{j,1}, \dots, c_{j,n(j)}\}$;

(c) un ensemble de **décisions**, ou d'**actions**, possibles D_j pour le joueur $j \in J$. Cet ensemble est souvent supposé fini, auquel cas on le note $D_j = \{d_{j,1}, \dots, d_{j,p(j)}\}$. Une décision $d_{j'}$ prise par un joueur $j' \in J$ peut être, en elle-même, une information $c_{j''} \in C_{j''}$ pour le joueur $j'' \in J$ ($j' \neq j''$) ;

(d) un ensemble de **fonctions de « gain »**. Chacune est propre à un joueur, et on la note f_j ($j \in J$) et elle est définie comme suit. Pour tout $(j', j'') \in J \times J \setminus \{j\}$, le nombre $f_{j'}(c_{j'}, d_{j'}, d_{j''})$ représente le **gain net** reçu par le joueur j' lorsqu'il connaît l'information $c_{j'} \in C_{j'}$, qu'il décide $d_{j'} \in D_{j'}$ et que les autres joueurs j'' ont décidé $d_{j''} \in \prod_{j \neq j'} D_j$.

Autrement dit, f_j est une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur $C_j \times D_j \times D_k$, où l'on note $D_k = \prod_{\alpha \neq j} D_\alpha$.

Par suite, le jeu peut se résumer dans un **tableau multidimensionnel** $T = (t_j)_j$ dans lequel $t_j \in \mathbf{R}$, j représente un multi-**indice** et $t_j = f_{j'}(c_{j'}, d_{j'}, d_{j''})$. Un tel tableau est souvent appelé **forme normale** du jeu. La **forme normale d'un jeu** résume donc l'ensemble des actions et des résultats du jeu de façon « instantanée » : on parle alors de **jeu statique**.

(ii) Il est cependant possible de donner à un jeu une **forme dynamique** (ou séquentielle). Il suffit de supposer, dans ce qui précède, que les informations, les décisions ou les gains dépendent du temps ou des dates auxquels les joueurs agissent. On parle alors de **forme développée** du jeu.

On peut alors supposer aussi que le nombre des joueurs varie au cours du temps (entrées et sorties du jeu).

(iii) Dans le cadre précédent, les éléments du jeu (nombre de joueurs, décisions, résultats ou gains) ne sont pas aléatoires. Un **jeu statistique** est un jeu tq l'un de ses éléments contient des données aléatoires : ainsi, le résultat d'une action dûe à un joueur peut n'être pas entièrement contrôlé par celui-ci (ensemble d'informations imparfaites), ce qui introduit une **variabilité** qui doit être prise en compte par l'ensemble des joueurs. L'étude statistique du jeu nécessite donc l'étude des **lois** des **variables aléatoires** ainsi introduites, voire l'analyse et la prévision du déroulement du jeu : les notions de **décision mixte** (ou **décision aléatoire**) et de **probabilité subjective** (ou **probabilité personnelle**) interviennent donc dans ce cadre.

La **théorie bayésienne** consiste alors à attribuer des **mesures de probabilité** à ce que chaque joueur considère comme « **paramètre** ».

(iv) L'exemple-type de modèle de jeu est celui du **jeu à deux personnes** (et à somme des gains nulle) ; c'est aussi celui du **jeu statistique** précédent, ie le jeu du **statisticien** contre la « **Nature** ».