THÉORIE SÉQUENTIELLE (G2, H2, I2, N)
(06 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Dans un **problème statistique**, un **plan d'échantillonnage séquentiel**, ou **plan d'observation séquentiel**, peut être :

(a) soit donné a priori ;

(b) soit construit au cours du **temps** (**approche « adaptative »**).

Il convient alors de définir une **procédure** de décision qui tienne compte de ce plan.

La **théorie de la décision statistique séquentielle**, aussi appelée **théorie séquentielle**, ou encore **analyse statistique séquentielle** ou **analyse séquentielle**, consiste à prendre des décisions successives dans des situations aléatoires au cours desquelles on peut procéder à une **expérimentation** progressive ou à un **échantillonnage** progressif, ie au tirage d'**observations** supplémentaires.

L'expérimentation ou l'échantillonnage s'arrêtent lorsque des conditions définies a priori se réalisent.

(i) Le **problème de la décision (statistique) séquentielle** peut se formaliser comme suit (cf **problème de décision séquentielle**) :

(a) $(\mathcal{X}_N , \mathcal{B}_N)$ est un **espace des états** à l'instant $N \in \mathbf{N}$, où $\mathcal{B}_N$ désigne, $\forall N \in \mathbf{N}$, une **tribu de parties** de $\mathcal{X}_N$;

(b) pour tout $N \in \mathbf{N}$, μ_N est une **mesure positive** σ-finie définie sur $\mathcal{B}_N$;

(c) $(A_N , \mathcal{A}_N)$ est un **espace de décisions**, ou **espace d'action(s)**, à l'instant $N \in \mathbf{N}$, dont la tribu est notée $\mathcal{A}_N$;

(d) $(\Theta, \mathcal{B}_\Theta)$ est l'espace du **paramètre** (ou **paramètre d'intérêt**) θ, muni d'une tribu $\mathcal{B}_\Theta$;

(e) il existe, $\forall N \in \mathbf{N}$, une fonction $f_N : \Theta \times \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_N \mapsto \mathbf{R}_+$ qui est $\mathcal{B}_\Theta \otimes \mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{B}_1 \ldots \otimes \mathcal{B}_N$ - mesurable et tq :

(e_1) la **fonction d'ensembles** $Q_0^\theta : B \mapsto \int_B f_0\ (\theta\ ,\ .)\ d\mu_0$ est une **mesure de probabilité** définie sur $\mathcal{B}_0$;

(e_2) pour tout $N \in \mathbf{N}$, Q_N^θ est une **probabilité conditionnelle régulière** (cf **probabilité de transition**) de la **variable aléatoire** $pr_N : \prod_{L \in \mathbf{N}} \mathcal{X}_L \mapsto \mathcal{X}_N$ sachant $(pr_0 , pr_1 ,..., pr_{N-1})$, ie est la probabilité :

$$Q_N^\theta : \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_{N-1} \times \mathcal{B}_N \mapsto \mathbf{R}_+$$

définie par :

(1) $Q_N^\theta : (x_0 , x_1 ,\ldots, x_{N-1} , B) \mapsto \int_B f_N (\theta, x_0 , x_1 ,\ldots, x_{N-1} , x_N)\, d\mu_N (x_N)$;

(f) il existe, $\forall N \in \mathbf{N}$, une fonction $c_N^\theta : \Theta \times \mathcal{X}_0 \times A_0 \times \mathcal{X}_1 \times A_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_N \times A_N \mapsto \mathbf{R}_+$ qui est $\mathcal{B}_\Theta \otimes \mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{A}_1 \ldots \otimes \mathcal{B}_N \otimes \mathcal{A}_N$ - mesurable, appelée **fonction de coût**, qui représente le coût (total) de l'expérience ou de l'échantillonnage jusqu'à l'instant N.

(ii) On appelle alors **décision séquentielle mixte**, ou **politique séquentielle mixte**, une suite $\delta = (\Pi_N)_{N \in \mathbf{N}}$ de probabilités de transition de l'espace $\mathcal{X}_0 \times A_0 \times \mathcal{X}_1 \times A_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_N \times A_N$ vers A_N . On note $\Delta = \{\delta\}$ l'ensemble des décisions séquentielles mixtes.

Etant donné la suite $(Q_N^\theta)_{N \in \mathbf{N}}$ et une décision $\delta \in \Delta$, le **théorème de TULCÉA** permet de déterminer sur $\Pi_{N \in \mathbf{N}} (\mathcal{X}_N \times A_N)$ une **probabilité**, notée P_δ^θ.

Si, $\forall N \in \mathbf{N}$, on définit la fonction $B_N : \Theta \times \Delta \mapsto \mathbf{R}_+$ selon ;

(2) $R_N (\theta, \delta) = \Sigma_{n=0}^N \int c_n^\theta \, dP_\delta^\theta$,

alors, la fonction $R_\infty : \Theta \times \Delta \mapsto \overline{\mathbf{R}}_+$ définie par la limite simple (ou limite ponctuelle) (cf **convergence simple**) :

(3) $R_\infty (\theta, \delta) = \lim_{N \to +\infty} R_N (\theta, \delta)$, $\forall (\theta , \delta)$,

est appelée **fonction de risque** du problème considéré.

On appelle **décision séquentielle minimax** tout élément $\delta^* \in \Delta$ tq (cf **règle minimax**, **point-selle**) :

(4) $\sup_{\theta \in \Theta} R_\infty (\theta, \delta^*) = \inf_{\delta \in \Delta} \sup_{\theta \in \Theta} R_\infty (\theta, \delta)$.