TIRAGE BERNOULLIEN (B3, M2, M3)
(27 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un **tirage bernoullien** est une épreuve aléatoire qui consiste en un **tirage avec remise** des éléments dans un **ensemble** donné d'éléments (**unités statistiques**) (cf aussi **schéma d'urne**, **épreuve de BERNOULLI**). Il s'agit donc d'une notion de base de la **théorie des sondages** (cf aussi **modèle de sondage**).

(i) Soit Ω un ensemble fini (avec Card $\Omega = M \geq 1$).

On appelle **tirage bernoullien**, ou **tirage avec remise**, dans Ω le choix aléatoire d'une **partie** finie $A = \{a_1 ,..., a_N\}$ dans l'ensemble Ω^N : donc Card A = N. Le sondage se fait avec « probabilités égales » au sens où ;

$$(1) \qquad P(A) = 1 / M^N = M^{-N}, \quad \forall A \in \mathscr{P}(\Omega).$$

Dans ce cadre , on assimile l'**échantillon** A extrait de Ω, et qui peut comporter des éléments identiques, à l'ensemble « ponctuel » composé d'un seul N-uple $\{(a_1 ,..., a_N)\}$. Il peut ainsi exister plusieurs éléments $a_{n(1)} ,..., a_{n(J)}$ de A tq $a_{n(1)} = ... = a_{n(J)} = \omega \in \Omega$ (donné), où $\omega \in \Omega$ et $1 \leq J \leq N$, où l'on note par commodité n(j) en **indice** pour désigner l'indice n_j (j = 1 ,..., J).

(ii) Etant donné une **partition** finie $\Pi_\Omega = \{\Omega_1 ,..., \Omega_H\}$ de Ω, avec Card $\Omega_h = M_h$ et $\Sigma_{h=1}^H M_h = M$, cette partition induit une partition aléatoire $\Pi_A = \{A_1 ,..., A_H\}$ de A, et l'on note Card $A_h = N_h$ et $\Sigma_{h=1}^H N_h = N$.

Le problème central est celui du dénombrement des cas dans lesquels A est partitionné selon une partition donnée Π_A . La proportion de tels cas est simplement égale à la « probabilité » suivante, définie par la **loi multinômiale** $\mathscr{M}_H (M, N, M_1 / M ,..., M_H / M)$ selon :

$$(1) \qquad P(\Pi_A) = \begin{array}{l} (N_1 ! \dots N_H !)^{-1} N ! (M_1 / M)^{N(1)} \dots (M_H / M)^{N(H)}, \\ \\ N ! . \Pi_{h=1}^H (N_h !)^{-1} (M_h / M)^{N(h)}, \end{array}$$

où N(h) désigne, par commodité, le nombre entier N_h ($h \in N_H$*).

Cette loi multinômiale est aussi celle du **vecteur aléatoire** $X = (X_1 ,..., X_H)$ dont la coordonnée X_h = Card $A_h = N_h$ est le nombre d'éléments de A_h : ce nombre est donc aussi aléatoire.

(iii) Un tirage bernoullien est donc un **tirage avec probabilités égales** et il conduit à un **échantillon indépendant**. Comme la taille N de l'échantillon A est supposée donnée, on dit aussi qu'il s'agit d'un **tirage bernoullien de taille N**.

Ω représente généralement un ensemble d'**événements** élémentaires (ou « individus » d'une **population**).

Comme pour tout échantillon, on distingue deux types d'échantillons de ce type (ou « échantillons purement aléatoires ») :

(a) **échantillon d'unités** : l'échantillon constitué des unités (individus) a_n de A, qui est de taille N. C'est donc un **échantillon avec remise des unités** dans Ω ;

(b) **échantillon de « valeurs »**. Si l'on peut mesurer, sur chaque élément $\omega \in \Omega$, un **caractère** donné η (ω), où $\eta : \Omega \mapsto \mathcal{Y} = \Pi_{g=1}^{G} \mathcal{Y}_g$ (ensemble produit d'**observations**), le tirage précédent définit (implicitement) un **échantillon de « mesures »** η (A) = (y_1 ,..., y_N) associées aux unités a_n de A, avec $y_n = \eta\ (a_n)$, $\forall$ n = 1 ,..., N. Par suite, la **probabilité** P de (1) induit une **loi** P^{η} pour la va η, ie $\eta \sim P^{\eta}$.

Le caractère η peut être numérique ou non, simple ou multiple.

(iv) Un exemple simple de tirage non bernoullien est le **tirage exhaustif** (cf aussi **sondage exhaustif**, **sondage sans remise**).

D'autres exemples dérivent de divers modes de **génération des lois** (discrètes) (cf eg **loi binômiale négative**, **loi de POLYÀ**).