TIRAGE EXHAUSTIF, TIRAGE SANS REMISE (B3, M2, M3)
(28 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un **tirage exhaustif**, ou **tirage sans remise**, est une épreuve aléatoire consistant à tirer sans remise des éléments dans un **ensemble** donné. Il s'agit d'une notion de base en théorie des sondages (cf **modèle de sondage**).

(i) Soit Ω un ensemble fini (card $\Omega = M \geq 1$).

On appelle **tirage exhaustif**, ou **tirage sans remise**, dans l'ensemble Ω le choix aléatoire d'une **partie** finie $A = \{a_1 ,..., a_N\}$ dans Ω : donc Card A = N. Le sondage se fait avec « probabilités inégales » au sens où :

$$(1)_a \quad P(A) = 1 / A_M^N = (A_M^N)^{-1}, \qquad \forall A \in \mathscr{P}(\Omega),$$

où $A_M^N = M (M - 1) ... (M - N + 1)$ est le nombre des **arrangements** sans répétition de N éléments parmi M.

Dans ce cadre, l'**échantillon d'unités** A extrait de Ω ne peut comporter d'unités (formellement) identiques : on l'assimile généralement à l'ensemble composé d'un seul N-uple $\{(a_1 ,..., a_N)\}$. Il ne peut ainsi exister plusieurs éléments $a_{n(1)} ,..., a_{n(J)}$ de A tq $a_{n(1)} = ... = a_{n(J)} = \omega \in \Omega$ (donné), avec$1 \leq J \leq N$, où l'on note par commodité n(j) en **indice** pour désigner l'indice n_j (j = 1 ,..., J).

Ce **plan de sondage** est donc défini par :

$$(1)_b \quad P(\{\omega\}) = \begin{cases} \{M (M-1) ... (M-N+1)\}^{-1} & \text{si les } \omega_m \text{ sont différents 2 à 2,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(ii) Etant donné une **partition** finie $\Pi_\Omega = \{\Omega_1 ,..., \Omega_H\}$ de Ω, avec card $\Omega_h = M_h$ et $\Sigma_{h=1}^H M_h = M$, cette partition induit une partition aléatoire $\Pi_A = \{A_1 ,..., A_H\}$ de A, et l'on note Card $A_h = N_h$ et $\Sigma_{h=1}^H N_h = N$. Le problème central est celui du dénombrement des cas dans lesquels on obtient une partition donnée Π_A . La proportion de tels cas est simplement égale à la probabilité suivante, définie par la **loi hypergéométrique** généralisée $\mathscr{H}_H (M, N, M_1 ,..., M_H)$ selon :

$$(1) \quad P(\Pi_A) = (C_M^N)^{-1} . (C_M^{N(1)} ... C_M^{N(H)}) = (C_M^N)^{-1} . \Pi_{h=1}^H C_M^{N(h)},$$

où N(h) désigne, par commodité, le nombre entier N_h ($h \in N_H$*), où C_m^n désigne un nombre de **combinaisons** (coefficient binômial), et où l'on suppose que :

$$(2) \quad \max(0, M_h - M + N) \leq N_h \leq \min(N, M_h), \qquad \text{pour tout } h \in \{1,..., H\}.$$

Cette loi est aussi celle du **vecteur aléatoire** $X = (X_1, ..., X_H)$ dont la coordonnée X_h dénombre les éléments de A_h (X_h = Card $A_h = N_h$) : ce nombre est donc lui aussi aléatoire.

(iii) Un tirage exhaustif est donc un **tirage avec probabilités inégales** et il conduit à un échantillon non indépendant d'unités. Comme la taille N de l'échantillon A est supposée donnée, on dit aussi qu'il s'agit d'un **tirage exhaustif de taille N**.

En particulier, si N = 1 (échantillon A à un seul élément), le tirage exhaustif est identique au **tirage bernoullien** de même taille.

Par ailleurs, si $\min_{h=1}^{H} M_h \rightarrow +\infty$ et si $M_h / M = p_h + o(M)$ (petit zéro), alors :

(3) $(C_M^N)^{-1} . (C_M^{N(1)} ... C_M^{N(H)}) \rightarrow N! . \Pi_{h=1}^{H} (N_h !)^{-1} (M_h / M)^{N(h)}$.

Autrement dit, la loi qui gouverne le tirage exhaustif tend vers celle du tirage bernoullien, et les deux tirages tendent à être équivalents.

En général, Ω représente un ensemble d'**événements** élémentaires ou un ensemble d'individus, et A un échantillon aléatoire de taille N.

(iv) Si l'on peut observer (mesurer), sur chaque élément (individu) $\omega \in \Omega$, un **caractère statistique** (numérique ou non, simple ou multiple) $\eta(\omega)$, où η est une **application** définie sur Ω et à valeurs dans un espace produit $\mathcal{Y} = \Pi_{g=1}^{G} \mathcal{Y}_g$, le tirage conduit a étudier l'**échantillon des « observations »** (**mesures**, etc) $\eta(A)$.

Dans un tel échantillon, il peut exister des valeurs tq $\eta(a_p) = \eta(a_n)$, mais avec $a_p \neq a_n$.