TOPOLOGIE DE PETTIS (A4, A5, B1, C1, C4)
(09 / 10 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit L_B^1 (Ω, $\mathcal{T}$, P) l'espace des (classes de) fonctions (ou **variables aléatoires**) P-intégrables à valeurs dans un **espace de BANACH** réel B.

La famille $(p_V)_V$ des **semi-normes** $p_V : L_B^1 \mapsto \mathbf{R}_+$ définies par :

(1) $$p_V(X) = \sup_{v \in V°} \int_\Omega |< v , X >| \, dP,$$

où $V \in \mathcal{V}_0$ (ensemble des voisinages de $0 \in B$), V° est l'**ensemble polaire** de V pour le produit scalaire $< . , . > : B' \times B \mapsto \mathbf{R}$ et où B' est le **dual topologique** de B, engendre une **topologie** sur L_B^1.

Cette topologie est appelée **topologie de B.J. PETTIS**.

(ii) La notion est souvent utilisée dans l'étude des **processus** (**martingale**, notamment) et de l'**intégrale stochastique**.

Ainsi, $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ étant une **suite** d'éléments de L_B^1, on dit que :

(a) X est une **suite bornée au sens de B.J. PETTIS** ssi :

(2) $$\sup_{n \in \mathbf{N}} p_V(X_n) < +\infty, \qquad \forall V \in \mathcal{V}_0 ;$$

(b) X est une **suite uniformément intégrable au sens de B.J. PETTIS** ssi :

(3) $$\lim_{P(A) \to 0+} p_V(\mathbf{1}_A . X_n) = 0 \text{ uniformément sur } \mathbf{N},$$

pour tout $V \in \mathcal{V}_0$ et tout $A \in \mathcal{T}$.