

TRACE (A3)

(10 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Ce terme se rencontre dans deux contextes principaux :

(a) **algèbre générale et structure trace**. Soit E un ensemble doté d'une **famille** $\mathcal{A}$ de parties $A \in \mathcal{P}(E)$ (famille de toutes les parties de E). Si $P \subset E$ est une **partie** donnée de E , on appelle **famille trace** de $\mathcal{A}$ sur P la famille $\mathcal{A}_P$ des parties de E suivante :

$$(0) \quad \mathcal{A}_P = \{A_P = A \cap P, \forall A \in \mathcal{A}\};$$

(b) **algèbre linéaire**, où la trace s'associe naturellement à un **opérateur linéaire** ou à une **matrice**.

(i) Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée d'ordre n à éléments dans un corps $\mathbf{K}$. On appelle **trace** de A la somme de ses éléments diagonaux, ie de ses éléments situés sur la diagonale principale :

$$(1) \quad \text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad \text{où } A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbf{K}).$$

(ii) La trace possède de nombreuses propriétés, notamment en conjonction avec les propriétés des matrices :

(a) l'**opération « trace »** tr (ou Tr), définie par $\text{tr} : A \mapsto \text{tr } A$ est une **forme linéaire** sur $M_n(\mathbf{K})$; autrement dit $\text{tr} \in (M_n(\mathbf{K}))^*$ (**dual** algébrique de $M_n(\mathbf{K})$), ou encore :

$$(2) \quad \text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr } A + \beta \text{tr } B,$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$ et tout $(A, B) \in M_n(\mathbf{K}) \times M_n(\mathbf{K})$;

$$(b) \text{tr}(A B) = \text{tr}(B A) ;$$

$$(c) \text{ si } A \in M_n(\mathbf{K}) \text{ et } R \in R_n(\mathbf{K}) \text{ alors } \text{tr } A = \text{tr}(R^{-1} A R) ;$$

$$(d) \text{ si } \text{Sp } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \text{ (cf } \textbf{spectre d'un opérateur}) \text{ alors } \text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i ;$$

(e) si $A \in M_n(\mathbf{K})$ et s'il existe un scalaire $k \in \mathbf{K}$ tel que $A^2 = k A$, alors $\text{tr } A = k (\text{rg } A)$;

$$(f) \text{tr}(A' A) = 0 \text{ ssi } A = 0, \text{ où } A \in M_{mn}(\mathbf{K}) ;$$

$$(g) \text{tr } A' = \text{tr } A ;$$

(h) si $A \in M_{mn}(\mathbf{K})$, alors $\text{tr}(A A') = \text{tr}(A' A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$. Si $a = v(A)$ est la matrice vectorialisée de A (cf **matricialisation**), on a aussi $\text{tr}(a' a) = \text{tr}(a a') = \|a\|^2$;

(i) soit $A \in M_n(\mathbf{K})$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Alors, en notant $\text{Sp } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, on a $\text{tr}(A^p) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^p$;

(j) si $A \in S_n(\mathbf{R})$ (**matrice symétrique**) et si $\text{Sp } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, alors $\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$;

(k) si $A \in A_n(\mathbf{K})$ (**matrice antisymétrique**) alors $\text{tr } A = 0$ et $\text{tr}(I_n + A) = n$;

(l) si $A \in M_n(\mathbf{K})$ et s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tq $A^p = 0$ (ie si A est une **matrice nilpotente** d'ordre p), alors $\text{tr } A = 0$;

(m) si $A \in M_n^+(\mathbf{K})$ (matrice semi-définie positive), alors $\text{tr } A = 0$ ssi $A = 0$;

(n) si $A \in M_n(\mathbf{K})$ et $B \in M_n(\mathbf{K})$, et si $p \in \mathbf{N}^*$, alors $\text{tr}(A^p B^p) = \text{tr}(B^p A^p)$;

(o) soit $A_i \in M_{n(i), n(i+1)}(\mathbf{K})$ une **suite** finie de matrices de formats resp (n_i, n_{i+1}) , pour tout $i = 1, \dots, k$, avec $n_{k+1} = n_1$. Alors $\text{tr}(A_1 \dots A_k) = \text{tr}(A_2 A_3 \dots A_k A_1)$ (propriété encore vraie pour toute **permutation** circulaire) ;

(p) si $A \in S_n(\mathbf{K})$ et $B \in S_n(\mathbf{K})$, alors $\text{tr}(A B)^2 \leq \text{tr}(A^2 B^2)$;

(q) soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. Alors :

(q₁) $\det(x' A x) = \text{tr}(A x x')$, $\forall x \in \mathbf{K}^n$;

(q₂) si $n = 2$ et $A \in R_2(\mathbf{K})$, alors $\text{tr } A = (\det A) (\text{tr } A^{-1})$;

(q₃) si $A \in S_n(\mathbf{K})$ et $A \neq O_n$, alors $\text{rg } A \geq (\text{tr } A)^2 / \text{tr}(A^2)$;

(q₄) si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $\text{Sp } A \subset \mathbf{R}$, avec $\text{Sp } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0\}$, alors $(\text{tr } A)^2 \leq r \cdot \text{tr}(A^2)$;

(q₅) si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $\text{Sp } A \subset \mathbf{R}$, alors $(\text{tr } A)^2 \leq (\text{rg } A) \text{tr}(A^2)$;

(q₆) si $A \in S_n(\mathbf{K})$, on a : $(\text{tr } A)^2 = (\text{rg } A) \text{tr}(A^2) \Leftrightarrow \exists p \in \mathbf{N}^* \text{ tq } A^2 = p \cdot A$;

(q₇) soit $A \in S_n(\mathbf{K})$. Alors : $A \in I_n(\mathbf{K})$ (**matrice idempotente**) $\Leftrightarrow \text{rg } A = \text{tr } A = \text{tr}(A^2)$;

(q₈) si $A \in M_n^{++}(\mathbf{K})$ (matrice strictement définie positive), alors $\text{tr } A > 0$;

(q₉) si A est une matrice semi-définie positive mais non strictement positive, alors $\text{tr } A = 0$;

(q₁₀) si $A \in M_n^+(\mathbf{R})$, alors $\text{tr } A \geq 0$;

(r) Soit $(A_i)_{i=1,\dots,k}$ une **suite** finie de matrices $A_i \in M_n^+(\mathbf{R})$ (matrices semi-définies positives). Alors :

$$(r_1) \operatorname{tr} \left(\sum_{i=1}^k A_i \right) = \sum_{i=1}^k \operatorname{tr} (A_i) \geq 0 ;$$

$$(r_2) \sum_{i=1}^k \operatorname{tr} (A_i) = 0 \Leftrightarrow A_i = 0, \forall i = 1, \dots, k ;$$

(s) Soit $(A_i)_{i=1,\dots,k}$ une suite finie de matrices $A_i \in M_{mn}(\mathbf{K})$. Alors :

$$(s_1) \sum_{i=1}^k \operatorname{tr} (A_i A_i') = 0 \Leftrightarrow A_i = O_{mn}, \forall i = 1, \dots, k ;$$

$$(s_2) \sum_{i=1}^k \operatorname{tr} (A_i' A_i) = 0 \Leftrightarrow A_i = O_{mn}, \forall i = 1, \dots, k ;$$

(t) Soit A et B éléments de $M_n^+(\mathbf{R})$ (matrices semi-définies positives). Alors $\operatorname{tr} (A B) \geq 0$. De plus, $\operatorname{tr} (A B) = 0$ ssi $A B = 0$;

(u) soit $(A_i)_{i=1,\dots,k}$ une suite tq $A_i \in M_n^+(\mathbf{R})$, pour tout i. Alors (cf **famille orthogonale de matrices**) :

$$(3) \quad \operatorname{tr} \left\{ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \delta_{ij} A_i A_j \right\} = 0 \text{ ssi la suite } (A_i)_{i=1,\dots,k} \text{ est orthogonale ;}$$

(v) soit $(A_i)_{i=1,\dots,k}$ une suite tq $A_i \in M_n^+(\mathbf{R})$, pour tout $i = 1, \dots, k$. Alors :

$$(v_1) \operatorname{tr} \left\{ \sum_{i=1}^k A_i A_i \right\} = \sum_{i=1}^k \operatorname{tr} (A_i A_i) \geq 0 ;$$

$$(v_2) \operatorname{tr} \left\{ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \delta_{ij} A_i A_j \right\} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \delta_{ij} \operatorname{tr} (A_i A_j) \geq 0 ;$$

$$(v_3) \operatorname{tr} \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i \right) \geq 0 \text{ pour toute suite } (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbf{R}_+^k ;$$

$$(v_4) \operatorname{tr} \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i \right) = 0 \text{ ssi } (A_i)_{i=1,\dots,k} = (O_n)_{i=1,\dots,k}, \text{ pour toute suite } (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbf{R}_+^k ;$$

(w) soit $(x_i)_{i=1,\dots,k}$ une suite d'éléments $x_i \in \mathbf{K}^n$ et $A \in S_n(\mathbf{K})$. Alors : $\operatorname{tr} \{A \cdot \sum_{i=1}^k x_i x_i'\} = \sum_{i=1}^k x_i' A x_i$;

(x) soit $A \in S_n(\mathbf{R}) \cap I_n(\mathbf{R})$ (symétrique idempotente) et $Q \in M_n^+(\mathbf{R})$. Alors $\operatorname{rg} (A Q^{-1} A) = \operatorname{tr} A$.

(iii) La trace est donc une opération définie sur l'**algèbre** des matrices carrées ; elle constitue un cas particulier, important en pratique, de la notion de **trace sur une algèbre**.

En **Statistique**, la notion de trace intervient eg dans les calculs algébriques (**modèle de régression**, **formes quadratiques**, etc), ou encore pour étudier certaines **statistiques** multivariées : eg **statistique de HOTELLING**, **statistique de PILLAI**, etc.