TRANSFORMATION DE FOURIER (A9 , C5)

L a **transformation de J.B.J. FOURIER** constitue un outils fondamental, tant en analyse mathématique (**théorie de la mesure**) qu'en calcul des probabilités (cf eg fonction caractéristique) et en Statistique (cf eg analyse spectrale).

(i) Soit μ une **mesure complexe** bornée sur $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ (**tribu des boréliens** de $\mathbf{R}^n$) (cf **mesure bornée**).

On appelle **transformée de J.B.J. FOURIER** de μ l'application $t \mapsto \mu^\wedge(t)$ définie par :

(1) $\quad t \mapsto \mu^\wedge(t) = \int e^{i(t\,.\,x)}\,d\mu(x), \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}^n,$

où t . x désigne le **produit scalaire** (dans $\mathbf{R}^n$) des éléments t et x de $\mathbf{R}^n$.

L'application $\mu \mapsto \mu^\wedge$ est notée $\mathscr{F}$. Par suite, on note souvent $\mu^\wedge = \mathscr{F}(\mu)$ ou $\mathscr{F}\,\mu$. On dit que $\mathscr{F}$ est la **transformation de FOURIER** associée aux mesures complexes bornées sur $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$.

(ii) La transformation de FOURIER $\mathscr{F}$ possède de nombreuses propriétés. Par exemple, on a $\mathscr{F}(\mu * \nu) = \mathscr{F}(\mu)\,.\,\mathscr{F}(\nu)$, où $*$ désigne le **produit de convolution** des mesures complexes bornées μ et ν et ou le . (point) désigne le produit ordinaire (ie numérique) des fonctions complexes.

(iii) Soit $f \in \mathscr{L}_{\mathbf{C}}^1(\mathbf{R}^n, \mathscr{B}(\mathbf{R}^n), \lambda_n)$ une fonction complexe intégrable, où λ_n désigne la **mesure de LEBESGUE** définie sur $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$.

On appelle **transformée de J.B.J. FOURIER** de f l'application $t \mapsto f^\wedge(t)$ définie par :

(2) $\quad t \mapsto f^\wedge(t) = \int e^{i(t\,.\,x)}\,d\lambda_n(x), \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}^n.$

On appelle alors **transformation de J.B.J. FOURIER** l'application, encore notée $\mathscr{F}$, définie par $\mathscr{F}(f) = f^\wedge$. On note aussi $\mathscr{F}\,f$ au lieu de $\mathscr{F}(f)$. On montre que l'on a encore $\mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F}(f)\,.\,\mathscr{F}(g)$.

(iv) Le problème de la détermination de la transformation inverse $\mathscr{F}^{-1}$ trouve sa solution dans des **formules d'inversion**, appelées **formule d'inversion de FOURIER** ou encore **formules de réciprocité de FOURIER** (cf aussi **application inverse**).

(v) En **calcul des probabilités**, la transformée de FOURIER prend le nom de **fonction caractéristique**.

(vi) En **Statistique** (**analyse spectrale**), la transformée de FOURIER intervient pour définir la **fonction d'autocovariance** d'un **processus** comme transformée de FOURIER de sa **mesure spectrale** (cf **densité spectrale**, **fonction de répartition spectrale**) (cf aussi eg **théorème de KHINTCHINE**).