TRANSFORMATION DE LAPLACE (A9)
(12 / 06 / 2019)

La **transformation de LAPLACE** transforme une **mesure** de façon analogue à celle de FOURIER. Elle intervient en **calcul des probabilités** ou en **Statistique** pour définir la notion de **fonction génératrice** d'une **loi de probabilité**. On en présente deux aspects.

(i) Soit μ une **mesure positive** définie sur $\mathscr{B}(\mathbf{R}_+^n)$ (**tribu borélienne** de $\mathbf{R}_+^n$).

On appelle **transformée de P.S. de LAPLACE** la fonction $\tilde{\mu}$ définie par :

(1) $\quad \tilde{\mu}(u) = \int e^{-u \cdot x} \, d\mu(x), \qquad \forall u \in (\mathbf{R}_+^*)^n,$

où u . x désigne le **produit scalaire** euclidien.

On appelle alors **transformation de P.S. de LAPLACE** l'application $\mathscr{L}$ qui associe à μ la fonction $\mathscr{L}(\mu) = \tilde{\mu}$.

(ii) Soit μ une **mesure positive** définie sur $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ (**tribu borélienne** de $\mathbf{R}^n$). On pose :

(1)' $\quad \tilde{\mu}(u) = \int e^{-u \cdot x} \, d\mu(x), \qquad \forall u \in \mathbf{C}^n,$

et l'on note :

(2) $\quad \mathscr{D}(\tilde{\mu}) = \{u \in \mathbf{C}^n : \tilde{\mu}(u) < \infty\} \subset \mathbf{C}^n$

l'ensemble de définition de la fonction $u \mapsto \tilde{\mu}(u)$ définie en (1)'.

On dit alors que la fonction $\tilde{\mu}$ est la **transformée de P.S. de LAPLACE** de la mesure μ : $\tilde{\mu}$ est donc définie dès que l'on a $\mathscr{D}(\tilde{\mu}) \neq \emptyset$.

L'application $\mu \mapsto \tilde{\mu}$ est notée $\mathscr{L}$. Par suite, on note souvent $\tilde{\mu} = \mathscr{L}(\mu)$ ou même $\mathscr{L}\mu$. On dit alors que $\mathscr{L}$ est la **transformation de P.S. de LAPLACE** associée à des mesures positives tq μ.

(iii) Si int $\mathscr{D}(\tilde{\mu}) \neq \emptyset$, ie si l'**intérieur** $(\mathscr{D}(\tilde{\mu}))°$ de $\mathscr{D}(\tilde{\mu})$ est non vide, on montre que $\tilde{\mu}$ est une **fonction analytique** dans l'ensemble :

(3) $\quad D(\tilde{\mu}) = \{u \in \mathbf{C}^n : \text{Ré}\, u \in (\mathscr{D}(\tilde{\mu}))°\}.$

On peut alors en calculer les dérivées successives $D^{(j)}\ \tilde{\mu}$ (où $j \in \mathbf{N}^*$) en dérivant l'expression (1)' sous le signe somme $\int$.

On montre aussi que, s'il existe un **ouvert** $U \subset \mathcal{D}\ (\tilde{\mu})$ tq $U \neq \varnothing$ et sur lequel la **restriction** $\tilde{\mu}_{/U} = 0$, alors $\mu = 0$ (mesure nulle).

(iv) En **calcul des probabilités**, la transformée de LAPLACE d'une **loi de probabilité** est appelée **fonction génératrice**. Ainsi, si μ est une **lp** P^{ξ} et si $P^{\xi} = \mathcal{N}_K\ (\mu, \Sigma)$ (**loi normale multidimensionnelle** à K > 1 dimensions), la transformée de LAPLACE de P^{ξ} s'écrit :

(4) $\quad g\ (u)$ ou $\tilde{\mu}\ (u) = \exp \{u\ .\ \mu + (1/2)\ u\ .\ (\Sigma\ u)\}, \qquad \forall\ u \in \mathbf{C}^n.$

Le problème de la détermination de la transformation inverse $\mathscr{L}^{-1}$ se résoud à travers des **formules d'inversion** (ou formules de réciprocité).