TRANSFORMATION DE MELLIN (A9)
(09 / 10 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Transformation fonctionnelle classique, analogue à la **transformation de FOURIER**.

(i) Soit μ une **mesure positive** définie sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ (**tribu borélienne** de $\mathbf{R}_+$) et $x : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}$ une **fonction numérique**.

On appelle **transformation de I. MELLIN**, ou **transformation de J.B.J. FOURIER - I. MELLIN**, une transformation intégrale de la forme $x \mapsto \Gamma x = y$ définie par :

(1) $y(t) = \int_{\mathbf{R}+} x(u) \,.\, u^{t-1} \,.\, d\mu(u), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+$.

Cette transformation se ramène à celle de FOURIER puisque $u^{t-1} = e^{(t-1) \operatorname{Log} u}$.

(ii) Soit $f : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}$ une fonction réelle scalaire.

On appelle **transformation de I. MELLIN** de f l'application $\mu : f \mapsto \mathcal{M}$ qui associe à f la fonction $\mathcal{M}$ définie par :

(1) $\mathcal{M}(u) = \int_{\mathbf{R}+} f(x) \,.\, x^{u-1}\, dx, \quad \forall u \in \mathbf{R}_+$.

Sa transformation inverse s'explicite selon :

(2) $f(x) = (\pi i)^{-1} \,.\, \int_{[c - i\infty,\, c + i\infty]} \mathcal{M}(u) \,.\, x^{-u}\, du, \quad \forall x \in \mathbf{R}$.