TREILLIS (A2, C4, L3, N2)
(26 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Il existe deux notions usuelles de **treillis** : l'une mathématique, l'autre mise en oeuvre en **théorie des processus** ou encore en **Statistique**.

(i) **Première notion**. Soit E un **ensemble** muni de deux lois de composition internes, notées $\vee$ et $\wedge$. On dit que (E, $\vee$, $\wedge$) est un **treillis de G. BOOLE**, ou un **lattis**, ou encore un **ensemble réticulé**, ssi :

(a) les lois $\vee$ et $\wedge$ sont associatives et commutatives ;

(b) ces lois vérifient les **propriétés d'absorption de G. BOOLE**, ou **« lois » d'absorption de G. BOOLE**, ie :

$$(1) \quad \begin{aligned} x \wedge (x \vee y) &= x, \\ x \vee (x \wedge y) &= x, \end{aligned} \qquad \forall\, (x, y) \in E^2.$$

Deux exemples classiques de treillis sont les suivants :

(a) soit Ω un ensemble quelconque. On pose E = $\mathscr{P}(\Omega)$ (**famille** des **parties** de Ω), $\vee = \cup$ (réunion) et $\wedge = \cap$ (intersection). Alors ($\mathscr{P}(\Omega)$, $\cup$, $\cap$) est un treillis ;

(b) l'espace des fonctions sur lequel est définie la notion de **mesure de RADON** est un treillis.

(ii) **Deuxième notion**. En théorie des processus (cf eg **promenade aléatoire**), on utilise une notion de treillis définie dans $\mathbf{R}^K$.

Soit $\{e_1 ,..., e_r\}$ une **famille** libre constituée de vecteurs de $\mathbf{R}^K$ (avec $r \leq K$) et $\{\alpha_1 ,..., \alpha_r\}$ des éléments d'une **partie** $Z \subset \mathbf{Z}$, où $\mathbf{Z} = \mathbf{N} - \mathbf{N}$ (entiers relatifs).

On appelle **treillis de dimension r** dans $\mathbf{R}^K$ l'ensemble suivant :

$$(2) \quad T_r = \{ z \in \mathbf{R}^K : z = \Sigma_{i=1}^r \alpha_i \,.\, e_i \,,\ \forall\, (\alpha_1 ,..., \alpha_r) \in Z^{\,r} \}.$$

Pour une promenade aléatoire sur E = T, on choisit en général $Z = \mathbf{Z}$. Etant donné un **état** initial $x_0 \in T_r$ et un **processus vectoriel** $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ à valeurs dans T_r , une **promenade aléatoire** sur E = T_r est alors définie par la suite $S = (S_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ tq :

$$(3) \quad \begin{aligned} S_0 &= x_0 \qquad \text{(souvent, } x_0 = 0\text{)}, \\ S_N &= x_0 + x_1 + ... + x_N \,, \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}^*, \end{aligned}$$

où l'on suppose X indépendant et équidistribué (cf **suite iid**).