TRIBU ENGENDRÉE (A5)
(08 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit E un **ensemble** abstrait, $((F_i\ ,\ \mathcal{B}_i))_{i\ \in\ I}$ une **famille** d'**espaces mesurables** dans laquelle $\mathcal{B}_i$ est une **tribu de parties** de F_i ($\forall$ i $\in$ I), et f = $(f_i)_{i\ \in\ I}$ une **famille** d'applications $f_i : E \mapsto F_i$.

On appelle **tribu engendrée** par la famille f la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu qui rend mesurables toutes les applications f_i (i $\in$ I) (cf **application mesurable**).

Si l'on note σ (f_i , i $\in$ I) cette tribu, on a, par définition :

(1) $\sigma\ (f_i\ ,\ i \in i)\ =\ \{f_i^{-1}\ (B_i) : B_i \in \mathcal{B}_i \text{ et } i \in I\}$.

Lorsque la famille $((F_i\ ,\ \mathcal{B}_i))_{i\ \in\ I}$ ne contient qu'un élément $(F_0\ ,\ \mathcal{B}_0)$ et que la famille f se réduit à un élément $f_0 : E \mapsto F_0$, on note selon $\sigma\ (f_0)$ la tribu engendrée par f_0 .

(ii) Soit $((E_i\ ,\ \mathcal{A}_i))_{i\ \in\ I}$ une famille d'espace mesurables. On note $E = \prod_{i\ \in\ I} E_i$ l'ensemble produit et $pr_i : E \mapsto E_i$ la i-ième **projection** canonique ($\forall$ i $\in$ I).

On appelle alors **tribu produit** sur E la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par la famille $(pr_i)_{i\ \in\ I}$ des projections canoniques. Ainsi, l'espace (E, $\mathcal{A}$) est un espace mesurable.

(iii) Lorsque aucune tribu n'est précisée sur un ensemble produit E, c'est généralement la tribu $\mathcal{A}$ ainsi définie qui est sous-entendue : on la note $\otimes_{i\ \in\ I}\ \mathcal{A}_i$. De plus, si $E_i = E_0$ et $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_0$ (pour tout i $\in$ I), E est une puissance cartésienne de E_0 (cf **produit**), et l'on note aussi $(E_0^I\ ,\ A_0^{\otimes I})$, voire $(E_0^I\ ,\ A_0^I)$, pour désigner (E, $\mathcal{A}$).

(iv) On peut noter que la tribu produit $\mathcal{A} = \otimes_{i\ \in\ I}\ \mathcal{A}_i$ est aussi la tribu engendrée par les **cylindres** $\prod_{i\ \in\ I} A_i$, produits dans lesquels :

(a) $A_j \in \mathcal{A}_j$ pour tout j $\in$ J, avec J $\subset$ I et card J $< \infty$ (partie finie de I) ;

(b) $A_i = E_i$, pour tout i $\in$ I \ J.