VALEUR TYPIQUE (DE FRÉCHET) (A1, C5)
(11 / 10 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **centralité** pour une **loi de probabilité** a conduit à définir diverses **caractéristiques légales** traduisant cette notion : **espérance mathématique**, **médiane**, **mode**, etc. Une **valeur typique au sens de FRÉCHET** est l'une d'entre elles (cf aussi **moyenne potentielle**, **espace L^p**, **moyenne dans L^p**).

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi \in L_{\mathbf{R}}^p (\Omega, \mathcal{T}, P)$ une **vars** de puissance p-ième intégrable, où $p \geq 1$. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, on note :

(1) $$\mu_p (\alpha) = E \|\xi - \alpha\|^p = \int |x - \alpha|^p \, dP^\xi (x)$$

le **moment absolu** moyen d'ordre p centré en α de la **variable aléatoire** ξ.

On appelle alors :

(a) **ensemble typique de R.M. FRÉCHET** l'ensemble des valeurs de α qui minimisent la fonction $\alpha \mapsto \mu_p (\alpha)$ précédente ;

(b) **valeur typique de R.M. FRÉCHET** la valeur unique, notée $V_p \xi$, à laquelle cet ensemble typique se réduit lorsque la fonction $\alpha \mapsto \mu_p (\alpha)$ est strictement convexe (cf **fonction convexe**).

(ii) Le concept de valeur typique englobe les exemples suivants :

(a) si $p = 1$, $V_1 \xi = Q_{1/2} \xi$ (**médiane** de ξ) ;

(b) si $p = 2$, $V_2 \xi = E \xi$ (**espérance** de ξ) ;

(ii) Si $X = (X_1 ,..., X_N)$ est un **échantillon iid** issu de la **variable parente** ξ et si le moment absolu moyen défini en (1) est calculé à l'aide de la **loi empirique** P_N associée à X, on définit le **moment absolu moyen empirique** d'ordre p centré en un point $a \in \mathbf{R}$ de X selon :

(2) $$m_p (a) = E_{PN} |\xi - a|^p = N^{-1} . \Sigma_{n=1}^N |X_n - a|^p,$$

où PN désigne par commodité P_N .

On peut alors définir les **valeurs typiques de FRÉCHET empiriques** comme celles qui minimisent la fonction $a \mapsto m_p (a)$. On les note $V_{p,N} X$.

La valeur de $\mu_p (V_p \xi)$ (resp de $m_p (V_{p,N} X)$), au point solution considéré, possède généralement une interprétation probabiliste ou statistique. Ainsi, lorsque $p = 2$, on a $\mu_2 (V_2 \xi) = \mu_2 (E \xi) = V \xi$ (**variance** théorique de ξ).

(iii) Les concepts précédents permettent de définir une **famille** de méthodes d'estimation pour un **modèle de régression**, méthodes appelées **méthodes de moindre norme** (cf **régression**).

Ainsi, un modèle de **régression non linéaire**, exprimé dans l'**espace des variables** (ξ, η), peut s'écrire sous la forme $\eta = \rho(\xi, b) + \varepsilon$, dans lequel η représente la **variable endogène** et ξ le vecteur (ou liste) des **variables exogènes**. Sa forme « observée » dans un **espace d'observation** (X, y) s'écrit $y = \mathrm{P}(b) + u$, où la **fonction aléatoire** P dépend de X.

La **méthode de moindre norme** (au sens de L^p) consiste alors à estimer b à l'aide de la **statistique** $b_p^{\sim}$ qui minimise $||u||_p = ||y - \mathrm{P}(b)||_p$, où $||u||_p^p = \Sigma_{n=1}^N |u_n|^p$. En particulier, si p = 2, la méthode obtenue est la **méthode des mco** (non linéaire).