

VARIABLE PETTIS - INTÉGRABLE (A5, C1, C4, N12)

(04 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace mesurable** (ou **espace probabilisable**) et $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **variable aléatoire**. On suppose que $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ est une **espace de BANACH** muni de sa **tribu borélienne** $\mathcal{B}$.

On dit que ξ est une **variable B.J. PETTIS - intégrable**, ou une **variable intégrable au sens de B.J. PETTIS**, pr à P (ou relativement à P) ssi il existe un élément unique $x \in \mathcal{X}$ tq, pour toute **forme linéaire** continue $f \in \mathcal{X}' = \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbf{R})$ (**dual topologique** de $\mathcal{X}$), on a :

$$(1) \quad f(x) = \int_{\Omega} f(\xi(\omega)) dP(\omega).$$

Autrement dit, il existe un élément $x \in \mathcal{X}$ unique tq :

$$(1)' \quad f(x) = \int f \circ \xi dP(\omega), \quad \forall f \in \mathcal{X}'.$$

Si l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le **produit scalaire** canonique :

$$(2) \quad (f, x) \in \mathcal{X}' \times \mathcal{X} \mapsto \langle f, x \rangle \in \mathbf{R},$$

la propriété (1) s'écrit aussi :

$$(1) \quad \exists x \in \mathcal{X} \text{ (unique) tq } \langle f, x \rangle = \int \langle f, \xi \rangle dP, \quad \forall f \in \mathcal{X}'.$$

Si x existe (et est unique), on note :

$$(3) \quad x = E \xi = \int \xi dP,$$

ce qui représente, par définition, l'**espérance mathématique** de f (au sens de B.J. PETTIS), ie un élément de $\mathcal{X}$.

(ii) On peut alors définir d'autres grandeurs relatives à ξ , eg la **variance généralisée** de ξ selon ;

$$(4) \quad V \xi = E \|\xi - E \xi\|^2.$$

Enfin, on dit que ξ est **intégrable au sens de E.J. PETTIS** ssi, pour tout $A \in \mathcal{F}$, il existe un élément de $\mathcal{X}$, noté $E(1_A \cdot \xi)$ ou $E 1_A \cdot \xi$, tq :

$$(5) \quad f(E(1_A \cdot \xi)) = E f(1_A \cdot \xi), \quad \forall f \in \mathcal{X}'.$$

