VARIABLE D'ARRÊT (E1, G2, B2, N6, N8)
(27 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Notion importante de la **théorie des processus**, la notion de **variable d'arrêt** s'associe en **Statistique** à la **théorie séquentielle** : taille d'échantillonnage, tests séquentiels, etc (cf **analyse séquentielle**, **temps d'arrêt**).

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{T}, P), (E, \mathcal{A}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique**. On suppose que :

(a) X est en **temps** discret, avec $T = \mathbf{N}$;

(b) $\mathcal{F} = (\mathcal{T}_t)_{t \in T}$ est une **suite** de sous-**tribus** adaptée à la **famille** $X = (X_t)_{t \in T}$ (cf **processus adapté**, **filtration**). Autrement dit, pour tout $t \in T$, la **variable aléatoire** X_t est $(\mathcal{T}_t, \mathcal{A})$-mesurable.

On appelle alors **variable d'arrêt** une variable aléatoire entière (ou va naturelle) N : $\Omega \mapsto \overline{\mathbf{N}}$ (où $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$) tq :

$$(1) \quad \begin{cases} [N \le n] = \{\omega \in \Omega : N(\omega) \le n\} \in \mathcal{T}_t, & \forall t \in T, \\ P([N = +\infty]) = 0. \end{cases}$$

(ii) Les sous-tribus $\mathcal{T}_t$ de $\mathcal{T}$ s'interprètent souvent, dans ce cadre, comme familles d'**événements « antérieurs »** aux instants $t \in T$ (cf **évènement postérieur**). Par ailleurs, on munit l'ensemble des variables d'arrêt ainsi définies d'une **relation d'ordre** (partiel) en posant :

$$(2) \quad N' \le N'' \Leftrightarrow N'(\omega) \le N''(\omega), \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

On note souvent $N' \wedge N''$ la va N_1 définie par :

$$(3) \quad N_1(\omega) = \min(N'(\omega), N''(\omega)), \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

et $N' \vee N''$ la variable aléatoire N_2 définie par :

$$(4) \quad N_2(\omega) = \max(N'(\omega), N''(\omega)), \qquad \forall \omega \in \Omega.$$