VARIABLE LATTICIELLE (A3, C1, C4)
(04 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de **loi** P^ξ. On définit l'image de ξ selon :

(1) $\quad \mathrm{Im}\ \xi = \{x \in \mathbf{R} : x = \xi(\omega), \forall\ \omega \in \Omega\} \subset \mathbf{R}.$

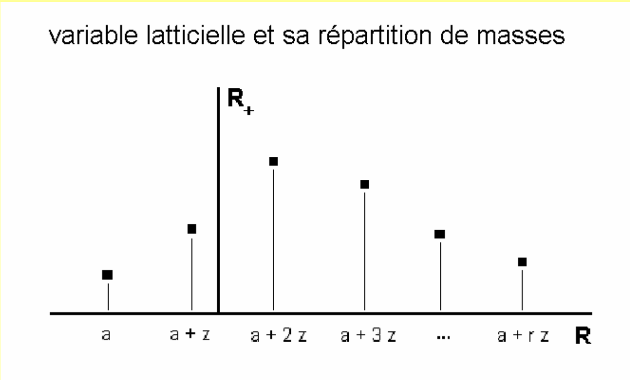
On dit alors que ξ est une **variable latticielle** ssi il existe un réel $a \in \mathbf{R}$ et un nombre $r \in \mathbf{R}_+$ tq :

(2) $\quad \mathrm{Im}\ \xi \subset a + r\ .\ \mathbf{Z} \subset \mathbf{R},$

où l'on note $a + r\ .\ \mathbf{Z}$ l'ensemble $\{x \in \mathbf{R} : x = a + r\ .\ z, \forall\ z \in \mathbf{Z}\}$.

On appelle r la **raison**, ou le **pas**, de la variable ξ, laquelle est aussi appelée **variable arithmétique** car ses valeurs sont en progression arithmétique.

La loi P^ξ de ξ est aussi appelée **loi latticielle** (cf représentation graphique ci-dessous).



(ii) La loi d'une **suite** de variables latticielles admet une **approximation** normale. En effet, soit $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une **suite indépendante** constituée de vars $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ équidistribuées selon la loi latticielle P^ξ (cf **suite équidistribuée**, **suite iid**). On suppose que X satisfait aux hypothèses du **théorème de BERRY-ESSÉEN** (cf ce théorème pour les notations) et l'on note $\sigma^2 = V\ \xi = E\ \xi^2$ leur **variance** commune. Alors, ξ étant une variable latticielle supposée de raison r, on a :

(3) $\quad \lim_{N \to \infty} \sup_{s \in \mathbf{R}} N^{-1} |G_N(s) - J(s) - A_N(\sigma)\ (1 - s^2) \exp(- s^2/2)| = (2\ \sigma)^{-1}\ (2\ \pi)^{-1/2}\ r,$

avec : $A_N(\sigma) = (6\ \sigma^3)^{-1}\ (2\ \pi\ N)^{-1/2}\ E\ \xi^3$.

(iii) Des exemples classiques de variables ou de lois latticielles sont les suivants :

(a) $P = \mathcal{P}(\lambda)$ (**loi de POISSON**), avec $\mathrm{Im}\ \xi = \mathbf{N}$. Autrement dit, $a = 0$, $r = 1$ et $a_n = n$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$;

(b) $P = \mathscr{B}(n, p)$ (**loi binômiale**), avec $\operatorname{Im} \xi = N_n$. Autrement dit, $a = 0$, $r = 1$ et $a_n = n$, $\forall\ n \in N_n$.