VARIABLE MORPHOLOGIQUE (C1, C4, C6, G, J, K, L)
(06 / 05 / 2019)

Dans l'observation d'un **phénomène**, certains descripteurs ne sont ni des variables numériques, ni des variables qualitatives. Cette particularité conduit à la notion de **variable morphologique**, que l'on peut considérer comme « intermédiaire » entre les deux types de variables usuels précédents.

(i) Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $(\mathscr{K}, \mathscr{D})$ un **espace mesurable** (ou **espace probabilisable**) et $\kappa : \Omega \mapsto \mathscr{K}$ une **variable aléatoire**.

Dans certains **contextes statistiques**, les « valeurs » de κ sont des **formes** particulières, ou des « **objets** » particuliers : $\mathscr{K}$ est alors un ensemble de formes ou d'objets. Autrement dit, κ ne peut se ramener ni à une **variable qualitative**, ni à une **variable quantitative** : elle définit ainsi la notion de « **morphologie** ».

On dit alors que κ est une **variable morphologique**, ou encore une **variable objectale**.

(ii) Il existe une relation entre le concept de variable morphologique et celui de variable quantitative. En effet, Une forme $K \in \mathscr{K}$ peut parfois être entièrement déterminée à l'aide d'une ou plusieurs **fonctions numériques** (cf eg **variété différentielle**). Autrement dit, il existe un ensemble numérique E (eg $E = \mathbf{R}^Q$), une partie $D \subset E$ et une **application** $\psi : D \mapsto \mathscr{K}$ tq la forme K s'écrive :

$$(1) \qquad K = \{k \in \mathscr{K} : k = \psi(d), \forall d \in D\}.$$

Si $\psi : D \mapsto \psi(\mathscr{K})$ est une **bijection**, une telle forme se ramène alors à une liste constituée de S **variables numériques** $\{d_1 ,..., d_S\}$.

Les formes de ce type peuvent alors être classées en fonction des valeurs du vecteur $x = (x_1 ,..., x_Q) \in \mathbf{R}^Q$ (classification mathématique).

Si ce vecteur est aléatoire, on peut l'écrire $\xi = (\xi_1 ,..., \xi_Q) : \Omega \mapsto \mathbf{R}^Q$, et les propriétés aléatoires des formes correspondantes peuvent être déterminées par la **loi jointe** du vecteur ξ.

(iii) Il existe aussi une relation entre le concept de variable morphologique et celui de variable qualitative. En effet, lorsqu'on soumet $\mathscr{K}$ à une **classification statistique**, celle-ci permet de définir un ensemble $\mathscr{Y} = \{C_1 ,..., C_H\}$ comportant eg H classes C_h (h = 1 ,..., H} (avec Card $\mathscr{Y}$ = H). On peut alors associer à la variable morphologique initiale κ une variable qualitative $\eta : \Omega \mapsto \mathscr{Y}$ dotée des H modalités C_h . Autrement dit, les modalités du **caractère** (simple) η peuvent être déterminées (ie définies) à partir d'un ensemble de formes.

(iv) On peut noter divers types de formes usuelles :

(a) les surfaces : eg coniques, quadriques ;

(b) les volumes ;

(c) les graphes : eg arborescence, réseaux ;

(d) les formes fractales.

Des exemples élémentaires de formes sont les suivants :

(a) la **famille** des (« portions » de) surfaces S de $\mathbf{R}^3$ définies à l'aide d'équations « paramétriques », ie :

(2) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = \psi_x (u, v), y = \psi_y (u, v), z = \psi_z (u, v), \forall (u, v) \in D\}$,

où $D \subset \mathbf{R}^2$.

S est ici déterminée par deux variables u et v, qui constituent un vecteur numérique à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ (variable quantitative de dimension 2).

De même, la **classification** usuelle de certaines familles de surfaces de $\mathbf{R}^3$ (eg « quadriques, dégénérées ou non », « ellipsoïdes », « hyperboloïdes », « paraboloïdes ») permet d'en déduire une variable qualitative (eg ici à quatre modalités).

(b) la famille des **densités** de la **loi exponentielle** (négative) :

(3) $x \mapsto f_\alpha (x) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+) \, . \, e^{-\alpha x}$, $\forall x \in \mathbf{R}$,

indexée par le paramètre $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, où $\mathbf{1}(R)$ désigne l'indicatrice d'une partie $R \subset \mathbf{R}$.

Lorsque α varie lui-même selon une loi de densité d donnée, la famille des courbes exponentielles négatives associées constitue une forme aléatoire.