

VARIABLES INFINITÉSIMALES (E, N)

(04 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La notion « technique » de **variable infinitésimale** intervient principalement dans le **problème de la limite centrale** (cf aussi **théorème de la limite centrale**) et dans l'étude des **processus**.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé** et $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite indépendante** constituée de **vars** $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ tq $X_n \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. On pose :

$$\forall X_n = \sigma_n^2, \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad (\text{suite des } \mathbf{variances} \text{ marginales}),$$

$$(1) \quad T_N = \sum_{n=1}^N X_n, \quad \forall N \in \mathbf{N}^* \quad (\mathbf{suite} \text{ des totaux cumulés}),$$

$$\forall T_N = (\sigma(N))^2 = \sum_{n=1}^N \sigma_n^2, \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad (\text{suite des variances totales}),$$

et l'on considère la suite $Y = (Y_{nN})$ définie par :

$$(2) \quad Y_{nN} = X_n / \sigma(N), \quad \forall n \in N_N^* = \{1, \dots, N\} \text{ et } \forall N \in \mathbf{N}^*,$$

dans laquelle on suppose que $h = (h_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de nombres naturels $h_N \in \mathbf{N}^*$ tq $\lim_N h_N = +\infty$.

On dit alors que les **variables aléatoires** Y_{nN} (où $n = 1, \dots, h_N$ et $N \in \mathbf{N}^*$) sont des **variables infinitésimales** ssi :

$$(3) \quad \lim_N \sup_{1 \leq n \leq h(N)} P(|Y_{nN}| \geq \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

en notant $h(N)$ pour désigner h_N .