VARIATION D'UNE MESURE (A5)
(04 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Soit (E, $\mathcal{A}$) un **espace mesurable** et $\mu : \mathcal{A} \mapsto \mathbf{R}$ une **mesure** réelle. On note $\mathcal{P}_f$ (A) l'ensemble des **partitions** finies d'une **partie mesurable** A $\in \mathcal{A}$, elles-mêmes formées d'éléments de $\mathcal{A}$.

On appelle alors **variation positive** de μ la mesure μ^+ définie selon :

(1) $\quad \mu^+ (A) = \sup \Sigma_{i \in I,\, A(i) \in \mathcal{P}f(A)} (\mu (A_i))^+, \quad \forall A \in \mathcal{A},$

où I est un ensemble d'indices fini (et où l'on note A(i) pour A_i et $\mathcal{P}$f(A) pour $\mathcal{P}_f$ (A)).

Autrement dit :

(1)′ $\quad \mu^+ (A) = \sup \{\Sigma_{i \in I} (\mu (A_i))^+ : A_i \in \mathcal{P}_f (A)\}, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$

On appelle **variation négative** de μ la mesure μ^- définie selon :

(2) $\quad \mu^- (A) = \sup \Sigma_{i \in I,\, A(i) \in \mathcal{P}f(A)} (\mu (A_i))^-, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$

On appelle **variation absolue** de μ la mesure $|\mu|$ définie selon :

(3) $\quad |\mu| (A) = \sup \Sigma_{i \in I,\, A(i) \in \mathcal{P}f(A)} (|\mu (A_i)|)^+, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$

Les propriétés des variations des mesures sont analogues à celles des **partie positive** (resp négative) et de la **valeur absolue** définies pour des nombres réels.