VARIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE (A2)
(05 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **théorie des variétés** permet de définir de façon rigoureuse et de généraliser les notions de surfaces usuelles. Il existe une théorie algébrique et une théorie analytique (variétés différentielles).

(i) Soit (E, $\mathcal{O}$) un **espace topologique**, U $\in \mathcal{O}$ un **ouvert** de E, n $\in$ **N*** un entier positif et f un **homéomorphisme** de U sur un ouvert V de $\mathbf{R}^n$.

On appelle **carte** de E le triplet c = (U, n, f). L'ouvert U est appelé **domaine de définition** de c et l'entier n est la **dimension** de la carte c.

Une carte est donc une représentation, à caractère topologique, d'une partie de E sur une partie d'un espace (topologique) $\mathbf{R}^n$.

(ii) Soit U un ouvert de E, $n_1 \in$ **N*** et $n_2 \in$ **N*** deux entiers positifs, V un ouvert $\mathbf{R}^{n(1)}$, W un ouvert de $\mathbf{R}^{n(2)}$ (en notant n(i) pour désigner n_i , i = 1, 2), $f_1 : U \mapsto V$ et $f_2 : U \mapsto W$ deux homéomorphismes. On définit deux cartes $c_1 = (U, n_1 , f_1)$ et $c_2 = (U, n_2 , f_2)$ comme précédemment.

On dit alors que c_1 et c_2 sont des **cartes compatibles** ssi les applications $f_1 \circ f_2 : W \mapsto V$ et $f_2 \circ f_1 : V \mapsto W$, qui sont des homéomorphismes de V sur W, sont infiniment différentiables (cf **différentiabilité**).

On peut donc « passer », de manière « régulière », de certaines parties d'un espace $\mathbf{R}^n$ à certaines parties d'un espace $\mathbf{R}^p$, et inversement.

(iii) Plus généralement, soit $U_1 \in \mathcal{O}$ et $U_2 \in \mathcal{O}$ deux ouverts, $n_1 \in$ **N*** et $n_2 \in$ **N*** deux entiers positifs, V_i un ouvert de $\mathbf{R}^{n(i)}$ et $f_i : U_i \mapsto V_i$ un homéomorphisme de U_i sur V_i (i = 1, 2).

On dit que les **cartes** $c_1 = (U, n_1 , f_1)$ et $c_2 = (U, n_2 , f_2)$ sont **compatibles** ssi une (seule) des deux conditions suivantes est réalisée :

(a) ou bien $U_1 \cap U_2 = \varnothing$;

(b) ou bien les cartes « restreintes » (restrictions des cartes c_1 et c_2) à $U = U_1 \cap U_2$ suivantes :

(1) $c_1' = (U, n_1 , f_{1/U})$ et $c_2' = (U, n_2 , f_{2/U})$

sont compatibles (au sens précédent), où $f_{i/U}$ désigne la restriction de f_i à U (i = 1, 2).

(iv) On appelle alors **atlas** de E tout ensemble $\mathcal{A}$ constitué de cartes c de E qui sont deux à deux compatibles et dont les domaines de définition forment un **recouvrement** (ouvert) de E.

Si $\mathcal{A}$ est représentée par une famille $C = (c_i)_{i \in I}$ de cartes $c_i = (U_i , n_i , f_i)$, cette famille doit vérifier :

(a) soit $U_{ij} = U_i \cap U_j = \varnothing$ pour certains couples $(i, j) \in I^2$;

(b) soit les restrictions $(U_{ij} , n_i , f_{i / U_i \cap U_j})$ et $(U_{ij} , n_j , f_{j / U_i \cap U_j})$ sont tq $g_i \circ g_j^{-1}$ et $g_j \circ g_i^{-1}$ sont infiniment différentiables (où l'on note toujours $U_{ij} = U_i \cap U_j$) ;

(c) $\cup_{i \in I} U_i = E$.

Par suite, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont appelés **atlas compatibles** ssi toute carte de l'un est compatible avec toute carte de l'autre. Sur l'ensemble des atlas de E, la **relation de compatibilité** ~ ainsi définie est une **relation d'équivalence** : cette relation définit donc des classes d'atlas $\mathcal{A}^{\sim}$ de E.

(iv) On appelle alors **variété différentielle**, ou **variété différentiable**, le couple (E, $\mathcal{A}^{\sim}$) constitué d'un espace topologique séparé (E, $\mathcal{O}$) et d'une classe $\mathcal{A}^{\sim}$ d'atlas de E.

(v) En **Statistique**, une variété différentielle se présente comme un ensemble de sous-variétés différentielles associées à des cartes, ces sous-variétés admettant des représentations paramétriques (cf **exemple** concret). Ainsi :

(a) lorsque $(E, \mathcal{O}) = (\mathbf{R}^N, \mathcal{O}(\mathbf{R}^N))$, une sous-variété V de dimension $Q \leq N$ dans $\mathbf{R}^N$ sera représentée selon :

(2) $\quad V = \{z \in \mathbf{R}^N : z = F(b), \forall b \in B\}$,

où $B \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^Q)$ et où F est une fonction assez régulière. Une variété (différentielle) sera alors constituée de la réunion de telles sous-variétés.

Le **modèle non linéaire** (pr au paramètre b) de la théorie de la **régression** illustre la définition de la formule (2) ;

(b) la notion de variété différentielle intervient encore, souvent implicitement :

$(b)_1$ en **théorie des tests** et des **régions de confiance** ;

$(b)_2$ dans l'étude de la **fonction de vraisemblance** et de certaines grandeurs qui peuvent s'en déduire (eg **rapport des vraisemblances**).