VECTORIALISATION (D'UNE MATRICE) (A3)
(11 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $A \in M_{mn}$ (**K**) une (m, n)-matrice sur un corps **K**.

On appelle **vectorialisé(e)** de A, ou (en abrégé) « ***vecteur A*** », le vecteur colonne a $\in \mathbf{K}^{m+n}$ défini selon :

(1) $a = (A^1 /// \ldots /// A^n) \in \mathbf{K}^{m+n}$,

où A^j (j = 1,..., n) est le j-ième vecteur colonne de $A = [A^1, \ldots, A^n]$. Autrement dit, a résulte de l' « empilement vertical » des n colonnes de A (ce que symbolisent les ///).

Le vectorialisé a de la matrice A est noté A^v ou v (A).

On appelle **opérateur de vectorialisation**, ou simplement **vectorialisation**, d'ordre (m, n) de la matrice A l'application $v : M_{mn}(\mathbf{K}) \mapsto (\mathbf{K}^m)^n$ définie par :

(2) $A \mapsto v(A) = a$

où a est défini en (1).

(ii) On établit que :

(a) v est une **application linéaire** f ;

(b) si $A \in M_{mn}(\mathbf{K})$, $B \in M_{np}(\mathbf{K})$ et $C \in M_{pq}(\mathbf{K})$, alors :

(3) $v(A\,B\,C) = (C' \otimes A)\, v(B)$

(cf **produit tensoriel algébrique**).

En particulier, $v(A\,B) = (I_p \otimes A)\, v(B) = (B' \otimes I_m)\, v(A)$;

(c) si $x \in K^m$ et $y \in K^n$, alors :

(4) $A = x\,y' \Leftrightarrow v(A) = y \otimes x$;

(d) si $A \in M_{mn}(\mathbf{K})$, $B \in M_{np}(\mathbf{K})$, $C \in M_{qr}(\mathbf{K})$, $B \in M_{rs}(\mathbf{K})$, alors :

(5) $(A\,B) \otimes (C\,D) = (v(B)' \otimes I_{np})(I_s \otimes v(A)\, v(D) \otimes I_r)\,(I_{ps} \otimes v(C))$.