

VOLUME (A13, A5)

(11 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La « mesure » d'un « volume » peut s'interpréter mathématiquement comme la valeur d'une **mesure** (au sens de la **théorie de la mesure**) attachée à une **partie mesurable**.

(i) Etant donné un **espace mesuré** $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et une partie mesurable $A \in \mathcal{A}$, on associe à A la mesure $\mu(A)$.

En pratique, l'espace considéré est un **espace euclidien** réel $\mathbf{R}^n$, muni de sa **tribu borélienne** $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ sur laquelle on considère la **mesure de LEBESGUE** λ_n .

La partie A représente une figure géométrique (boule ou sphère, parallélépipède, ellipsoïde, etc) et la valeur $\lambda_n(A)$ est appelée **volume** de A .

(ii) A titre d'exemple, on peut citer les volumes suivants :

(a) celui du parallélépipède, ou « pavé », soit $A = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i[$:

$$(1) \quad V_n(a, b) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) ;$$

(b) celui de la **boule** unité $A = B_n(0, 1) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|^2 \leq 1\}$, où $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Ce volume $V_n = \lambda_n(B_n(0, 1))$ vaut :

$$(2) \quad V_n = \pi^{n/2} / \Gamma\{(n/2) + 1\} \quad (\text{cf } \textbf{fonction } \Gamma) ;$$

(c) celui de la boule de centre 0 et de rayon $r > 0$, soit $A = B_n(0, r) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|^2 \leq r^2\}$. Ce volume vaut :

$$(3) \quad V_n = \begin{array}{ll} 2 \cdot r^n (2\pi)^p / \{1.3. \dots (2p+1)\} & \text{ssi } n = 2p + 1 \\ r^n \pi^p / p! & \text{ssi } n = 2p. \end{array}$$

(iii) Les exemples précédents supposent que les parties A sont de même dimension que $\mathbf{R}^n$ et non λ_n -négligeables.

Ainsi, dans $\mathbf{R}^3$, le volume de la boule $B_3(0, 1) = (4/3)\pi$, tandis que celui du disque $S = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$ est nul pour la mesure λ_3 et vaut $\lambda_2(S_3) = \pi$ pour la mesure λ_2 (ie aussi pour la restriction de λ_3 au plan $x_3 = 0$).

(iii) En **Statistique**, les notions de volume (de surface, de longueur, etc) interviennent dans deux contextes principaux :

(a) le premier concerne la **géométrie stochastique** (ou géométrie aléatoire), qui est la géométrie des figures aléatoires, ou encore celle des variables aléatoires à « valeurs géométriques » (cf **Statistique géométrique**).

Une figure géométrique aléatoire est simplement une figure géométrique (eg une variété différentielle) dont certaines caractéristiques dépendent de « paramètres » aléatoires : ainsi en est-il d'un cercle de $\mathbf{R}^2$ dont le rayon r suit eg une **loi exponentielle**, ou d'une droite dans $\mathbf{R}^2$ dont un coefficient directeur suit une **loi uniforme continue**. Cette géométrie étudie diverses questions tq l'étude de la probabilité qu'une telle figure coupe une région (elle-même aléatoire ou non) de l'espace.

Une variable aléatoire géométrique n'est ainsi autre qu'une variable aléatoire dont l'ensemble des « valeurs » est lui-même un ensemble de figures géométriques : ainsi en est-il d'une variable aléatoire égale à un ellipsoïde donné avec la probabilité p et égale à un tore avec la probabilité $1 - p$. La notion de **probabilité géométrique** est la notion de base utilisée dans ces questions ;

(b) le second concerne l'étude des **régions de confiance**, ou celle des **tests** associés. Ainsi, on recherche généralement, dans l'ensemble des régions de confiance relatives à un **paramètre** donné et de niveau donné, celle(s) qui sont les plus « précises », ie qui « entourent » le plus possible la **vraie valeur** (supposée) du paramètre (cf **région de confiance la plus précise**, **région de confiance minimale**).